SOLUCIONES MATEMÁTICAS 5ª EV.- MATEMÁTICAS II - 15/5/18

1.- Considere matriz: $A=\begin{pmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule el determinante de **A**.

b) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4 y A^5. Calcule A^{2016}.

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha \end{vmatrix}=-sen^2\alpha-\cos^2\alpha=-\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=-1$$

b)

$$A^2=\begin{pmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} sen^2\alpha+\cos^2\alpha & sen\,\alpha\cdot\cos\alpha-sen\,\alpha\cdot\cos\alpha & 0 \\ sen\,\alpha\cdot\cos\alpha-sen\,\alpha\cdot\cos\alpha & sen^2\alpha+\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I\Rightarrow$$

$$A^3=A^2A=IA=A=\begin{pmatrix} sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^4=A^2A^2=I.I=I\Rightarrow A^5=A^4A=IA=A\cdots$$

$$A^{2016}=\left(A^2\right)^{1008}=A^2A^2A^2A^2\ldots A^2A^2\ldots=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.- a) Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro **a** (1,75p.)

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+ay+a^2z=-1 \\ ax+a^2y+a^3z=2 \end{cases}$$

b) Resuelva el sistema cuando sea compatible (0,25p.)

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}=a^4+a^3+a^2-a^2-a^4-a^3=0 \Rightarrow \text{Es compatible indeterminada o incompatible}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & a^2 & -1 \\ a & a^2 & a^3 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -3 \\ 0 & a^2-a & a^3-a & 2-2a \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -3 \\ 0 & a(a-1) & a(a^2-1) & 2-2a \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -3 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & \frac{2-2a}{a} \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2-2a}{a}+3 \end{array}\right) \Rightarrow \frac{2-2a}{a}+3=0 \Rightarrow \frac{2-2a+3a}{a}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{2+a}{a}=0 \Rightarrow 2+a=0 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow \text{Cuando } a=-2 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$\text{Con } a \neq -2 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

Con $a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -8 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$-y+z=1 \Rightarrow z-1=y \Rightarrow x+z-1+z=2 \Rightarrow x=-2z+3 \Rightarrow \text{Solución } (x,y,z)=(3-2\lambda,-1+\lambda,\lambda)$$

3.- Dada la función $f(x)=e^{\frac{2x}{1+x^2}}$, se pide

a) Estudie las asíntotas de la gráfica de **f (x)**. (0,5 p.)

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función. (1,5 p.)

a)

$Dom(f)=\forall x\in\Re \Rightarrow$ *No hay asíntotas verticales*

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{1+x^2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+1}=\frac{0}{0+1}=0 \quad De\ (1)$$

Exixte asíntota horizontal, $y=1,$ *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2x}{1+x^2}}=e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x^2}}=e^0=1 \quad De\ (2)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{1+x^2}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+1}=\frac{0}{0+1}=0 \quad (2)$$

Exixte asíntota horizontal, $y=1,$ *cuando* $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2x}{1+x^2}}}{x}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblícua cuando } x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{2x}{1+x^2}}}{x}=\frac{1}{-\infty}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblícua cuando } x\to-\infty$$

b)

$$f'(x)=e^{\frac{2x}{1+x^2}}\cdot\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}\cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}}=2\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}\cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}}\Rightarrow$$

$$Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow 2\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}\cdot e^{\frac{2x}{1+x^2}}>0\Rightarrow\begin{cases} 2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ (1+x^2)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ e^{\frac{2x}{1+x^2}}>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ 1-x>0\Rightarrow -x>-1\Rightarrow x<1 \\ 1+x>0\Rightarrow x>-1\end{cases}$$

$-\infty$	-1		1	∞
2 > 0	(+)	(+)	(+)
$(1+x^2) > 0$	(+)	(+)	(+)
$e^{\frac{2x}{1+x^2}} > 0$	(+)	(+)	(+)
x < 1	(+)	(+)	(-)
x > -1	(-)	(+)	(+)
Solución	(-)	(+)	(-)

Creciente $\forall x \in \Re / -1 < x < 1$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / (x < -1) \cup (x > 1)$

Mínimo relativo en $x = -1 \Rightarrow f(-1) = e^{\frac{2\cdot(-1)}{1+(-1)^2}} = e^{\frac{-2}{2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ **de decreciente pasa a creciente**

Máximo relativo en $x = 1 \Rightarrow f(1) = e^{\frac{2\cdot 1}{1+1^2}} = e^{\frac{2}{2}} = e$ **de creciente pasa a decreciente**

4.- a) La recta **r** queda determinada por el vector **PQ**, que es su vector director, y uno cualquiera de esos puntos, tomaremos **Q**

$$\overrightarrow{PQ} = (0\,,0\,,2) - (-1\,,0\,,2) = (1\,,0\,,0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

b) La mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AR**, siendo **R** el punto genérico de la recta **r,** es el área que nos piden. Con el valor del parámetro que consigamos hallaremos el punto **C**.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\,,1\,,3) - (1\,,1\,,1) = (0\,,0\,,2) \\ \overrightarrow{AR} = (\lambda\,,0\,,2) - (1\,,1\,,1) = (\lambda - 1\,,-1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda - 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AR} = 2\,(\lambda - 1)\vec{j} + 2\vec{i} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AR}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2(\lambda - 1)^2} = 2\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda + 1} = 2\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$$

$$Área = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AR}\right| \Rightarrow \sqrt{15} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \Rightarrow \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} = \sqrt{15} \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 15 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 13 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-13) = 4 + 52 = 56 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{56}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2 + \sqrt{56}}{2} = 1 + \sqrt{14} \\ \lambda = \frac{2 - \sqrt{56}}{2} = 1 - \sqrt{14} \end{cases}$$

$$Q_1 \begin{cases} x = 1 + \sqrt{14} \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow Q_1\left(1 + \sqrt{14}\,,0\,,2\right) \qquad Q_2 \begin{cases} x = 1 - \sqrt{14} \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow Q_2\left(1 - \sqrt{14}\,,0\,,2\right)$$

5.- Dadas las matrices:

$$N=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ donde **a** , **b** y **c** son números reales que verifican que $a \neq 0,\ a+b=0,\ c=a$

Estudie el tipo del Sistema de ecuaciones que viene dado por: **N·X = B** (2 p.)

El sistema es Compatible Determinado si el determinante de las incognitas no es nulo

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} ax+by+cz \\ bx+cy+az \\ cx+ay+bz \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} ax+by+cz=1 \\ bx+cy+az=0\Rightarrow \\ cx+ay+bz=1 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=acb+acb+acb-c^3-a^3-b^3=-a^3-b^3-c^3+3abc\Rightarrow Como\ c=a\Rightarrow$$

$$-a^3-b^3-a^3+3aba=-2a^3+3ba^2-b^3=-2a^3+2ba^2+ba^2-b^3=-2a^2(-a+b)+b\,(a^2-b^2)=$$

$$=-2a^2(-a+b)+b\,(a+b)\,(a+b)=-2a^2(-a+b)+b\cdot 0\cdot(a+b)=-2a^2(-a+b)\Rightarrow Como\Rightarrow b=-a\Rightarrow$$

$$-2a^2(-a-a)=-2a^2\cdot(-2)=4a^3\neq 0\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

6.- Calcule el área comprendida entre la curva $f(x)=\dfrac{3}{6+2x^2}$ el eje de abcisas y las rectas verticales que pasan por sus puntos de inflexión (2 p.)

$$f(x)=\frac{3}{2\cdot(3+x^2)}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}\frac{-2x}{(3+x^2)^2}=-3\cdot\frac{x}{(3+x^2)^2}\Rightarrow f''(x)=-3\cdot\frac{(3+x^2)^2-2(3+x^2)2x\cdot x}{(3+x^2)^4}$$

$$f''(x)=-3\cdot\frac{3+x^2-4x^2}{(3+x^2)^3}=-3\cdot\frac{3-3x^2}{(3+x^2)^3}=9\cdot\frac{x^2-1}{(3+x^2)^3}\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow$$

$$x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}\Rightarrow Posibles\ puntos\ de\ inflexión$$

$$f(-x)=\frac{3}{2\cdot\left[3+(-x)^2\right]}=\frac{3}{2\cdot\left(3+x^2\right)}=f(x)\Rightarrow \textit{Simétrica respecto a OY}\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2\cdot\left[3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}=\frac{3}{2\cdot\left(3+\frac{1}{4}\right)}=\frac{3}{2\cdot\frac{13}{4}}=\frac{12}{26}=\frac{6}{13}>0\Rightarrow \textit{Es positiva}$$

$$A=2\int_0^1\frac{3}{2\cdot\left(3+x^2\right)}dx=3\int_0^1\frac{dx}{3+x^2}=3\int_0^1\frac{dx}{3\left(1+\frac{x^2}{3}\right)}=\int_0^1\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{dt}{1+t^2}=\left[arc\ tg\ t\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}}=t\Rightarrow dx=\sqrt{3}dt\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$$

$$A=\left(arc\ tg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-arc\ tg\ 0\right)=\frac{\pi}{6}u^2$$