SOLUCION MODELO EXAMEN FINAL 6EV MATEMATICAS II (3/5/18)

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices B que cumplen la condición A · B · A = A.

Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es condición necesaria que el número de columnas del multiplicando sea igual que el número de filas del multiplicador.

Según lo anterior, para que pueda efectuarse el producto A · B · A la matriz B tiene que tener por dimensión 3 x 2.

Sea $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B\cdot A=A \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ e & f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix}a-c & -a+c & b-d\\ e & -e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a-c=1\\ b-d=0\\ \underline{e=0}\\ \underline{f=1}\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{c=a-1}$;; $\underline{d=b}$.

Las matrices B son de la forma $\underline{B=\begin{pmatrix}a & b\\ a-1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$.

2º) Sabemos que las funciones $f(x)=\pi x-x^2$ y $g(x)=sen\ x$ se cortan sólo en dos puntos. Encuentra esos dos puntos y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de f(x) y g(x).

Los puntos de corte de las funciones se hallan de la igualación de sus ecuaciones:

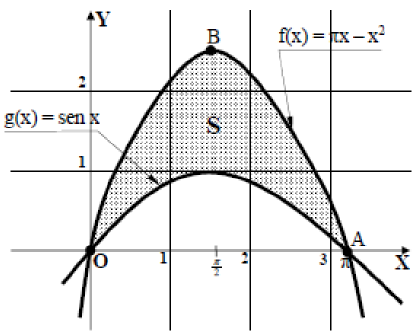
$f(x)=g(x) \Rightarrow \pi x-x^2=sen\ x$;; $x^2-\pi x+sen\ x=0 \Rightarrow \underline{x_1=0}$;; $\underline{x_2=\pi}$.

Los puntos de corte de las funciones son O(0, 0) y $A(\pi,\ 0)$.

El punto máximo de la parábola cóncava $(\cap)$ $f(x)=\pi x-x^2$ es el siguiente:

$$f'(x)=\pi-2x=0 \ ;;\ x=\frac{\pi}{2}\cong 1'57 \ ;;\ f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\pi\cdot\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}\cong 2'47 \Rightarrow \underline{B(1'57,\ 2'47)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la siguiente:



Como puede observarse, todas las ordenadas correspondientes a la función f(x) son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función g(x) en el intervalo correspondiente al área a calcular.

$$S=\int_0^{\pi}[f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_0^{\pi}\left[(\pi x-x^2)-sen\ x\right]\cdot dx=\int_0^{\pi}(\pi x-x^2-sen\ x)\cdot dx=\left[\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cos x\right]_0^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{\pi\cdot\pi^2}{2}-\frac{\pi^3}{3}+\cos\pi\right)-(\cos 0)=\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{3}-1-1=\frac{3\pi^3-2\pi^3-12}{6}=\frac{\pi^3-12}{6}\cong\frac{31'01-12}{6}=$$

$$=\frac{19'01}{6}=\underline{\underline{3'17\ u^2=S}}$$

****

3º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} (a-1)x+(a+2)y=5 \\ (1-a)x+(-1-a)y+2z=-4 \\ y+(a^2+a)z=2-a \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 1-a & -1-a & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} a-1 & a+2 & 0 & 5 \\ 1-a & -1-a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & a^2+a & 2-a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 1-a & -1-a & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{vmatrix}=-(a-1)(a+1)a(a+1)-2(a-1)-(1-a)(a+2)a(a+1)=$$

$$=-a(a^2-1)(a+1)-2(a-1)+(a-1)(a+2)a(a+1)=-a(a^2-1)(a+1)-2(a-1)+a(a^2-1)(a+2)=$$

$$=a(a^2-1)[(a+2)-(a+1)]-2(a-1)=a(a^2-1)(a+2-a-1)-2(a-1)=a(a^2-1)-2(a-1)=$$

$$=a(a+1)(a-1)-2(a-1)=(a-1)(a^2+a-2)=0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; a^2+a-2=0 \;;;\; a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{a_2=1} \;;;\; \underline{a_2=-2}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ determinado$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3 - F_1\} \Rightarrow \underline{Rango\ M' = 2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^{o}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ indeterminado}}$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ M'\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -12 + 15 - 12 = -9 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a=-2 \Rightarrow Rango\ M = 2\ ;;\ Rango\ M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos en el caso de compatible determinado.

$$\begin{cases} (a-1)x + (a+2)y = 5 \\ (1-a)x + (-1-a)y + 2z = -4 \\ y + (a^2+a)z = 2-a \end{cases} \Rightarrow \text{ Sumando a la segunda fila la primera:}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a+2-1-a)y + 2z = 1 \\ y + (a^2+a)z = 2-a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y + 2z = 1 \\ y + (a^2+a)z = 2-a \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Restando a la segunda la primera:}$$

$$(a^2+a-2)z = 1-a\ ;;\ (a-1)(a+2)z = 1-a \Rightarrow \underline{z = \frac{-1}{a+2}}\ ;;\ y = 1-2z = 1+\frac{2}{a+2} = \frac{a+2+2}{a+2} = \underline{\frac{a+4}{a+2} = y}.$$

$$(a-1)x + (a+2)y = 5\ ;;\ (a-1)x + (a+2)\cdot\frac{a+4}{a+2} = 5\ ;;\ (a-1)x = 5-a-4 \Rightarrow \underline{x=-1}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\ x=-1,\ y=\frac{a+4}{a+2},\ z=\frac{-1}{a+2}.}}$$

Resolvemos ahora en el caso de compatible indeterminado, para α = 1, en cuyo caso el sistema resulta $\begin{cases} 3y = 5 \\ -2y + 2z = -4 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \frac{5}{3}}\ ;;\ z = \frac{1-y}{2} = \frac{1-\frac{5}{3}}{2} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = \underline{-\frac{1}{3} = z}.$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases},\ \forall \lambda \in R}}$$

****

4º) Dado el punto P(1, 0, 1), el plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$, la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcular el punto P' simétrico de P respecto de π.

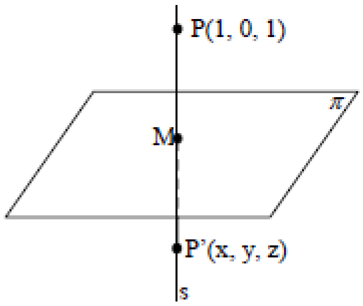
b) Hallar la distancia de P a r.

c) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas O(0, 0, 0) y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY, OZ.

----

a)

El vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(1,\ 5,\ -6)$.



La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano; su ecuación dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5\lambda \\ z=1-6\lambda \end{cases}.$$

El punto M, intersección del plano π con la recta s, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x+5y-6z=1 \\ s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5\lambda \\ z=1-6\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (1+\lambda)+5(5\lambda)-6(1-6\lambda)=1 \ ;;\ 1+\lambda+25\lambda-6+36\lambda=1 \ ;;$$

$$62\lambda=6 \ ;;\ 31\lambda=3 \ ;;\ \underline{\lambda=\frac{3}{31}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1+\frac{3}{31}=\frac{34}{31} \\ y=\frac{15}{31} \\ z=1-\frac{18}{31}=\frac{13}{31} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{34}{31},\ \frac{15}{31},\ \frac{13}{31}\right)}.$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'} \Rightarrow M-P=P'-M \ ;;\ \left(\frac{34}{31},\ \frac{15}{31},\ \frac{13}{31}\right)-(1,\ 0,\ 1)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{34}{31},\ \frac{15}{31},\ \frac{13}{31}\right) ;;$$

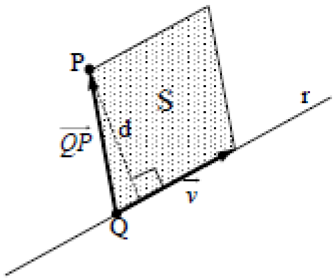
$$\left(\frac{3}{31},\ \frac{15}{31},\ -\frac{18}{31}\right)=\left(x-\frac{34}{31},\ y-\frac{15}{31},\ z-\frac{13}{31}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-\frac{34}{31}=\frac{3}{31} \to \underline{x=\frac{37}{31}} \\ y-\frac{15}{31}=\frac{15}{31} \to \underline{y=\frac{30}{31}} \\ z-\frac{13}{31}=-\frac{18}{31} \to \underline{z=-\frac{5}{31}} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{P'\left(\frac{37}{31},\ \frac{30}{31},\ -\frac{5}{31}\right)}.$$

b)

La distancia d del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que

Q(0, 0, 1) es un punto de r y $\overrightarrow{v}=(0,\ 0,\ 1)$ es un vector director de la recta r.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S=d\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|$ y que también puede ser $S=\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{QP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$.

El vector $\overrightarrow{QP}$ en el caso que nos ocupa es:

$\overrightarrow{QP}=P-Q=(1,\ 0,\ 1)-(0,\ 0,\ 1)=(1,\ 0,\ 0)$.

$$d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{|j|}{\sqrt{1}}=\frac{1}{1}=\underline{1\ unidad}.$$

c)

Los puntos de corte del plano $\pi\equiv x+5y-6z=1$ con los ejes de coordenadas se obtienen igualando a cero las variables que no coincidan con el eje:

$$Eje\ X\ \rightarrow \begin{Bmatrix} y=0 \\ z=0 \end{Bmatrix}\Rightarrow x=1\Rightarrow \underline{A(1,\ 0,\ 0)}.$$

$$Eje\ Y\ \rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ z=0 \end{Bmatrix}\Rightarrow 5y=1\ ;;\ y=\tfrac{1}{5}\Rightarrow \underline{B(0,\ \tfrac{1}{5},\ 0)}.$$

$$Eje\ Z\ \rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \end{Bmatrix}\Rightarrow -6z=1\ ;;\ z=-\tfrac{1}{6}\Rightarrow \underline{C\left(0,\ 0,\ -\tfrac{1}{6}\right)}.$$

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{OB}=\left(0,\ \frac{1}{5},\ 0\right)$ y $\overrightarrow{OC}=\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{6}\right)$.

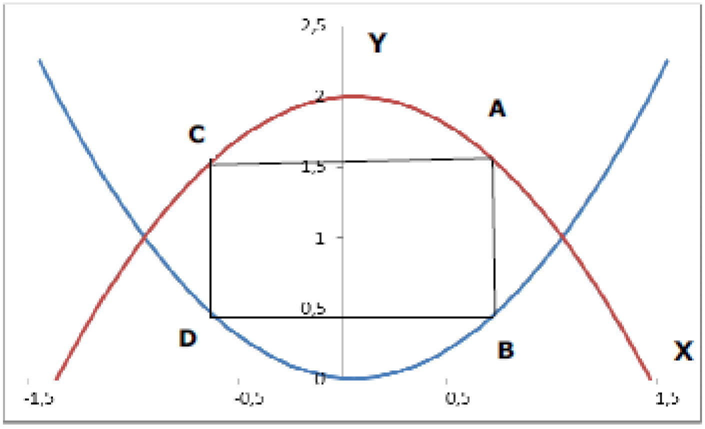
El volumen de un tetraedro en función de los tres vectores que lo determinan es un sexto del producto mixto de estos vectores.

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\left|-1\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\right|=\underline{\frac{1}{180}\,u^3}$$

****

5)

E3.- Determinar los vértices del rectángulo de área máxima que tiene lados paralelos a los ejes de coordenadas y vértices en el borde del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=2-x^2$



El área es el producto del módulo de **AB** por el de **AC**

$$Coordenadas \Rightarrow \begin{cases} De\ A \Rightarrow (x\,,2-x^2) \\ De\ B \Rightarrow (x\,,x^2) \\ De\ C \Rightarrow (-x\,,2-x^2) \\ De\ D \Rightarrow (-x\,,x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB}=(x\,,2-x^2)-(x\,,x^2)=(0\,,2-2x^2) \\ \overline{AC}=-(x\,,2-x^2)-(-x\,,2-x^2)=(2x\,,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left|\overline{AB}\right|=\sqrt{0^2+(2-2x^2)^2}=(2-2x^2) \\ \left|\overline{AC}\right|=\sqrt{0^2+(2x)^2}=2x \end{cases} \Rightarrow S=\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|=2x\,(2-2x^2)=4x\,(1-x^2)\Rightarrow$$

$$S'=\frac{dS}{dx}=4\,(1-x^2-2x\cdot x)=4\,(1-3x^2)\Rightarrow Si\ S'=0\Rightarrow 4\,(1-3x^2)=0\Rightarrow 3x^2-1=0\Rightarrow 3x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow S''=\frac{d^2S}{dx^2}=-4\cdot 6x=-24x\Rightarrow S''=-24\frac{\sqrt{3}}{3}=-8\sqrt{3}<0\Rightarrow Máximo$$

$$Coordenadas \Rightarrow \begin{cases} De\ A \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,,2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\frac{5}{3}\right) \\ De\ B \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\frac{1}{3}\right) \\ De\ C \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\frac{5}{3}\right) \\ De\ D \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

6º) Resuelva la siguiente integral: $\int (Sen\ x)\cdot Ln(1+Sen\ x)dx$

$$\int \operatorname{Sen} x \cdot \operatorname{Ln}(1+\operatorname{Sen} x)\, d(x)$$

No podemos coger $u = \operatorname{Sen} x$, $dv = \operatorname{Ln}(1+\operatorname{Sen} x)\, d(x)$ porque ... V sería muy difícil; así es cambia para ... hacer la integral de Senx más sencilla

$u = \operatorname{Ln}(1+\operatorname{Sen} x) \Rightarrow d(u) = \frac{1}{1+\operatorname{Sen} x} \cdot \operatorname{Cos} x \, d(x)$

$d(v) = \operatorname{Sen} x \, d(x)$

$V = \int \operatorname{Sen} x \, d(x) = -\operatorname{Cos} x$

esta integral es mucho más sencilla

$\int u \, d(v) = u \cdot v - \int v \, d(u)$

$$\int \operatorname{Sen} x \operatorname{Ln}(1+\operatorname{Sen} x)\, d(x) = \operatorname{Ln}(1+\operatorname{Sen} x) \cdot (-\operatorname{Cos} x) - \int -\operatorname{Cos} x \cdot \frac{\operatorname{Cos} x}{1+\operatorname{Sen} x}\, d(x)$$

$$= -\operatorname{Cos} x \cdot \operatorname{Ln}(1+\operatorname{Sen} x) + \int \frac{\operatorname{Cos}^2 x}{1+\operatorname{Sen} x}\, d(x)$$

$$I = \int \frac{\operatorname{Cos}^2 x}{1+\operatorname{Sen} x}\, d(x) = \int \frac{(1-\operatorname{Sen}^2 x)}{1+\operatorname{Sen} x}\, d(x) \Rightarrow$$

por: $\operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Sen}^2 x = 1$ [Suma · diferencia].

$$\Rightarrow = \int \frac{1-\operatorname{Sen}^2 x}{1+\operatorname{Sen} x} = \int \frac{(1-\operatorname{Sen} x)\cancel{(1+\operatorname{Sen} x)}}{\cancel{(1+\operatorname{Sen} x)}}\, d(x) =$$

$$= \int 1 \, d(x) - \int \operatorname{Sen} x \, d(x) = x - (-\operatorname{Cos} x) =$$

$$= (\operatorname{Cos} x) + x$$

$$\Rightarrow -(\operatorname{Cos} x) \cdot (\operatorname{Ln}(1+\operatorname{Sen} x)) + \operatorname{Cos} x + x$$

$$= \boxed{x + \operatorname{Cos} x \cdot [1 - \operatorname{Ln}(1+\operatorname{Sen} x)] + C}$$

Muy posible EXAMEN.