SOLUCIONES 2º MODELO EXAMEN MATEMÁTICAS II 6ª EV. (3/5/18)

1.- Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & 2 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de ***x, y, z*** para los que ***A*** no tiene inversa

b) Determina los valores de ***a*** para los que el sistema ***B.A = C*** tiene solución

c) Resuelve el sistema anterior cuando sea posible.

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z\end{vmatrix}=y^2+yz^2-xyz-y^2z=y^2(1-z)+yz(z-x)=y[y(1-z)+z(z-x)]$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow\begin{cases} y=0 \\ y(1-z)+z(z-x)=0\Rightarrow\begin{cases}1-z=0\Rightarrow z=1 \\ z-x=0\Rightarrow z=x\end{cases}\Rightarrow x=z=1\end{cases}$$

b)

$$B\cdot A=C\Rightarrow\begin{pmatrix} a & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} ax+2y+3 & ay+3z & az+2y+3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+2y=1 \\ ay+3z=0 \\ 2y+(a+3)z=2\end{cases}\Rightarrow|D|=\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 0 & 2 & a+3\end{vmatrix}=a^2(a+3)-6a=a^3+3a^2-6a=a\cdot\left(a^2+3a-6\right)$$

$$Si\ |D|=0\Rightarrow a\cdot\left(a^2+3a-6\right)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a^2+3a-6=0\Rightarrow\Delta=9+24=33\Rightarrow a=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}\end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\left\{\frac{-3-\sqrt{33}}{2},0,\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right\}\Rightarrow rang(D)=3=N^o\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & 2 & a+3 & 2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & 2a & a(a+3) & 2a\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a(a+3)-6 & 2a\end{array}\right)\Rightarrow a^2+3a-6=0\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2} \\ a=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a=-3+\sqrt{33} \\ 2a=-3-\sqrt{33}\end{cases}\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$c)$

Sistema Compatible Determinado

$$\begin{cases} ax+2y=1 \\ ay+3z=0 \\ 2y+(a+3)z=2 \end{cases} \Rightarrow |D|=\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 0 & 2 & a+3 \end{vmatrix}=a^2(a+3)-6a=a^3+3a^2-6a=a\cdot\left(a^2+3a-6\right)$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & a+3 \end{vmatrix}}{a\cdot\left(a^2+3a-6\right)}=\frac{a(a+3)+12-6}{a\cdot\left(a^2+3a-6\right)}=\frac{a^2+3a+6}{a\cdot\left(a^2+3a-6\right)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a+3 \end{vmatrix}}{a\cdot\left(a^2+3a-6\right)}=\frac{-6a}{a\cdot\left(a^2+3a-6\right)}=-\frac{6}{a^2+3a-6}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{a\cdot\left(a^2+3a-6\right)}=\frac{2a^2}{a\cdot\left(a^2+3a-6\right)}=\frac{2a}{a^2+3a-6}$$

2º) Encuentra el punto de la recta $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ que forma un triángulo isósceles con los puntos P(1, 3, -2) y Q(3, 1, 0).

Este problema, en teoría, tiene varias interpretaciones, dependiendo de las distancias de los puntos P y Q a r y de la distancia entra P y Q.

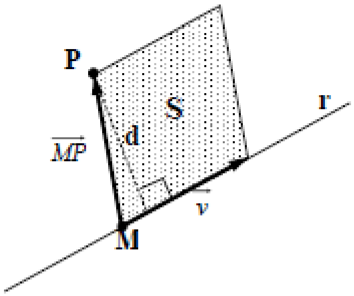
La distancia entre los puntos es:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \underline{\sqrt{12} = \overline{PQ}}$$

La distancia de un punto P a la recta r se determina del modo siguiente:

La recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ y un punto genérico de la misma es $A(-2+\lambda,\ 1-2\lambda,\ -2+\lambda)$.

Un punto y un vector director de r son: $M(-2,\ 1,\ -2)$ y $\overrightarrow{v} = (1,\ -2,\ 1)$.



Teniendo en cuenta que $S = d \cdot |\overrightarrow{v}|$ y que también puede ser $S = |\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{MP}|$, se deduce que la distancia es: $d(N,\ r) = \frac{|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{v}|}$.

$\overrightarrow{MP} = P - M = (1,\ 3,\ -2) - (-2,\ 1,\ -2) = \underline{(3,\ 2,\ 0) = \overrightarrow{MP}}$

$$d(P,\ r) = \frac{|\overrightarrow{MP} \wedge \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2i - 6k - 2k - 3j|}{\sqrt{6}} = \frac{|2i - 3j - 8k|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2}}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4+9+64}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{77}{6}} = \underline{\sqrt{12'83} = d(P,\ r) > \overline{PQ}}$$

La distancia del punto Q a la recta r es la siguiente:

Teniendo en cuenta que $S = d \cdot |\overrightarrow{v}|$ y que también puede ser $S = |\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{MQ}|$, se deduce que la distancia es: $d(Q,\ r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{MQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$.

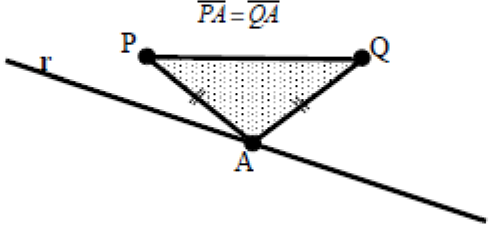
$\overrightarrow{MQ}=Q-M=(3,\ 1,\ 0)-(-2,\ 1,\ -2)=\underline{(5,\ 0,\ 2)=\overrightarrow{MQ}}$

$$d(Q,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{MQ}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|2j-10k+4i-5j|}{\sqrt{6}}=\frac{|4i-3j-10k|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{4^2+3^2+10^2}}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{16+9+100}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{125}{6}}=\underline{\sqrt{20'83}=d(Q,\ r)>\overline{PQ}}$$

La única solución posible es que $\overline{PA}=\overline{QA}$

$\overline{PA}=\overline{QA}$



$$\overline{PA}=\sqrt{(-2+\lambda-1)^2+(1-2\lambda-3)+(-2+\lambda+2)^2}=\sqrt{(\lambda-3)^2+(-2\lambda-2)^2+\lambda^2}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2-6\lambda+9+4\lambda^2+8\lambda+4+\lambda^2}=\underline{\sqrt{6\lambda^2+2\lambda+13}=\overline{PA}}$$

$$\overline{QA}=\sqrt{(-2+\lambda-3)^2+(1-2\lambda-1)+(-2+\lambda-0)^2}=\sqrt{(\lambda-5)^2+(-2\lambda)^2+(\lambda-2)^2}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2-10\lambda+25+4\lambda^2+\lambda^2-4\lambda+4}=\underline{\sqrt{6\lambda^2-14\lambda+29}=\overline{QA}}$$

$$\overline{PQ}=\overline{PA}\ \Rightarrow\ \sqrt{6\lambda^2+2\lambda+13}=\sqrt{6\lambda^2-14\lambda+29}\ ;;\ 2\lambda+13=-14\lambda+29\ ;;\ 16\lambda=16\ ;;\ \underline{\lambda=1}$$

<u>El punto de la recta es A(-1, -1, -1).</u>

****

3.- Dado el sistema $S \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

I) Añade una tercera ecuación al sistema ***S*** de modo que la verifique el punto ***P(-4 , 1 , 0)*** y el sistema formado por las tres ecuaciones tenga la misma solución que ***S***
II) ¿Pertenece a un mismo haz de planos los definidos por cada una de las tres ecuaciones?. Justifica las respuestas

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + z = 3 \quad \Rightarrow Por\ verificar\ P \Rightarrow -4a + b = 0 \\ ax + by + cz = d \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ a & b & c & d \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \\ 2a & 2b & 2c & 2d \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 2b-a & 2c+2a & 2d-a \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -4a + b = 0 \\ -a + 2b = -3 \end{cases} \Rightarrow -7b = 12 \\ 2c + 2a = 4 \\ 2d - a = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{12}{7} \Rightarrow -a + 2 \cdot \left(-\frac{12}{7}\right) = -3 \Rightarrow a = 3 - \frac{24}{7} = -\frac{3}{7} \\ 2c + 2a = 4 \Rightarrow c - \frac{3}{7} = 2 \Rightarrow c = 2 + \frac{3}{7} = \frac{17}{7} \\ 2d - a = 5 \Rightarrow 2d + \frac{3}{7} = 5 \Rightarrow 2d = \frac{32}{7} \Rightarrow d = \frac{16}{7} \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{7} \cdot x - \frac{12}{7} y + \frac{17}{7} z = \frac{16}{7} \Rightarrow$$

$$-3x - 12y + 17z = 16$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & -12 & 17 & 16 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \\ -6 & -24 & 34 & 32 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -21 & 28 & 35 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x - z = 4 \Rightarrow z = 3x - 4 \Rightarrow x - y + 3x - 4 = 3 \Rightarrow y = -7 + 4x$$

$$Solución(\lambda\ ,\ -7 + 4\lambda\ ,\ 3\lambda - 4)$$

II)

Determinan una sola recta de la que conocemos sus ecuaciones, por lo tanto pertenecen al mismo haz de planos que se definen la recta ***r***

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -7 + 4\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$$

4.- Sea la función $f(x)=\dfrac{sen\ x}{2-\cos x}$. Calcula:

a) Su dominio de definición. Sus máximos y mínimos en el intervalo $[0\ ,\ 2\pi]$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

a)

$$2-\cos x=0 \Rightarrow \cos x=2 \Rightarrow \forall x\notin\Re \Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re$$

$$f'(x)=\frac{\cos x(2-\cos x)-[-(-senx)]\cdot sen\ x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cdot\cos x-\cos^2 x-sen^2 x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cdot\cos x-(\cos^2 x+sen^2 x)}{(2-\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot\cos x-1}{(2-\cos x)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 2\cdot\cos x-1=0\Rightarrow 2\cdot\cos x=1\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{-2\cdot sen\ x\cdot(2-\cos x)^2-2\cdot(2-\cos x)\cdot(2\cos x-1)}{(2-\cos x)^4}=\frac{-2\cdot sen\ x\cdot(2-\cos x)-2\cdot(2\cos x-1)}{(2-\cos x)^3}$$

$$f''(x)=2\cdot\frac{-2\cdot sen\ x+sen\ x\cdot\cos x-2\cos x+1}{(2-\cos x)^3}=2\cdot\frac{sen\ x\cdot\cos x-2(sen\ x+\cos x)+1}{(2-\cos x)^3}$$

$$\begin{cases} f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cdot\dfrac{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-2\left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)+1}{\left(2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^3}=2\cdot\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+1}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^3}\\[2ex] f''\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=2\cdot\dfrac{sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)-2\left(sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)+1}{\left(2-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^3}=2\cdot\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+1}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^3}\end{cases}$$

$$\begin{cases} f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cdot\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}-1+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=2\cdot\dfrac{\frac{\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{4}}{\frac{27}{8}}=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{27}=4\cdot\dfrac{(-3\sqrt{3})}{27}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}<0\Rightarrow \textit{Máximo}\\[2ex] f''\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=2\cdot\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}-1+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=2\cdot\dfrac{\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{3}}{4}}{\frac{27}{8}}=4\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{27}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}>0\Rightarrow \textit{Mínimo}\end{cases}$$

$a)Continuación$

$$Máximo\ relativo\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4-1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$Mínimo\ relativo\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4-1}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$b)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sen\ x}{2-\cos x}\,dx=$$

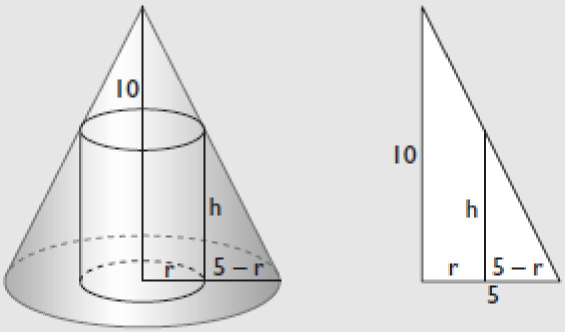
$$2-\cos x=u\Rightarrow sen\ x\ dx=du\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow u=2-\cos 0=1\\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=2-\cos\frac{\pi}{3}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

---

5)

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



r = radio del cilindro.

h = altura del cilindro.

$$\frac{10}{5}=\frac{h}{5-r}$$

b) Función que hay que maximizar.

$V(r,h)=\pi r^2h$

Sujeta a las condiciones:

$h=2(5-r)$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$V(r)=2\pi r^2(5-r)$

$V(r)=2\pi(5r^2-r^3)$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$V'(r)=2\pi(10r-3r^2)$

$V'(r)=0\Rightarrow r=0, r=10/3$

La solución r = 0 no tiene sentido.

Si r = 10/3 ⇒ h = 10/3

e) Se comprueba en la segunda derivada.

V"(r) = 2π(10 – 6r)

V"(10/3) = −20π < 0 (–) ⇒ máximo relativo.

f) El radio del cilindro debe medir r = 10/3 cm, y la altura, h = 10/3 cm

6º) Resuelva la siguiente integral:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx$$

Solución.-

$$\therefore \quad u = e^{\sqrt{x}} \qquad du = \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}} \qquad dv = dx \qquad v = x$$

$\int e^{\sqrt{x}}dx = xe^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int \frac{xe^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}}$, Se recomienda la sustitución: $z = \sqrt{x}, dz = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$= xe^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int z^2e^z dz$, Esta integral resultante, se desarrolla por partes:

$$\therefore \quad u = z^2 \qquad du = 2zdz \qquad dv = e^z dz \qquad v = e^z$$

$= xe^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\left(z^2e^z - 2\int ze^z dz\right) = xe^{\sqrt{x}} - \frac{z^2e^z}{2} + \int ze^z dz$, integral que se desarrolla partes:

$$\therefore \quad u = z \qquad du = dz \qquad dv = e^z dz \qquad v = e^z$$

$$= xe^{\sqrt{x}} - \frac{z^2e^z}{2} + ze^z - \int e^z dz = xe^{\sqrt{x}} - \frac{z^2e^z}{2} + ze^z - e^z + c = xe^{\sqrt{x}} - \frac{xe^{\sqrt{x}}}{2} + \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + c$$

$$= e^{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{2} + \sqrt{x} - 1\right) + c$$