SOLUCIONES MODELO 3 - 5EV. MATEMÁTICAS II - (7/5/18)

Ejercicio 1

a) Para que la matriz $A - mI$, admita inversa, su determinante debe ser no nulo.

$$\det(A - mI) = -m(3 - m)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0, m = 3$$

Luego $A - mI$ admite inversa para todo $\boxed{m \in \mathbb{R} - \{0, 3\}}$.

b) Si $B = A - 2I$, es $\det(B) = -2$ y $B^{-1} = -\frac{1}{2}Adj(B)^t = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2

Hay que tener en cuenta que

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) + 1 - x \text{ si } x \le 1 \\ 2\cos(x) + x - 1 \text{ si } x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} -2\,\mathrm{sen}\,(x) - 1 \text{ si } x < 1 \\ -2\,\mathrm{sen}\,(x) + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

a) Evaluando, se tiene que $f'(0) = -1$.

b) Como $f(\pi) = \pi - 3$ y $f'(\pi) = 1$, la ecuación de la recta tangente es $y = \pi - 3 + (x - \pi)$. Es decir $\boxed{y = x - 3}$.

c) Para $x \in (\pi, 2\pi)$ es $f(x) = 2\cos(x) + x - 1 > 0$, pues $x - 1 > 2 \ge 2\cos(x)$, luego el área pedida viene determinada por

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} (2\cos(x) + x - 1)\,dx = \left[2\,\mathrm{sen}\,(x) + \frac{x^2}{2} - x\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{3\pi^2}{2} - \pi$$

Ejercicio 3

a) Los puntos de la recta r equidistantes de los dos planos deben satisfacer

$$\frac{|3(1-2t) + (-1+t) + 2(1+t) - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|2(1-2t) - (-1+t) + 3(1+t) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}},$$

lo que equivale a $-3t + 3 = \pm(-2t + 5)$.

Las soluciones son $t = -2$ y $t = 8/5$, que corresponden a los puntos $\boxed{P_1(5, -3, -1) \text{ y } P_2(-11/5, 3/5, 13/5)}$ respectivamente.

b) El punto de intersección de r con π_1 satisface $3(1-2t) + (-1+t) + 2(1+t) - 1 = 0$, es decir es el punto $A(-1, 0, 2)$ (que corresponde a $t = 1$).

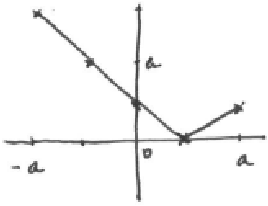
El punto de intersección de r con π_2 satisface $2(1-2t) - (-1+t) + 3(1+t) - 1 = 0$, es decir es el punto $B(-4, 3/2, 7/2)$ (que corresponde a $t = 5/2$).

El área del triángulo es $\boxed{S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}| = \frac{3\sqrt{35}}{4}}$.

$$= \ln 3 + 2\ln 5 = \ln(3\cdot 5^2) = \ln 75 \Rightarrow \boxed{n=75}$$

4. $y = \left|x - \frac{a}{2}\right|$

x	y
$-a$	$3a/2$
$-a/2$	a
0	$a/2$
$a/2$	0
a	$a/2$



$$\int_{-a}^{0}\left|x-\frac{a}{2}\right|dx = \int_{-a}^{0}\left(-x+\frac{a}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{a}{2}x\right]_{-a}^{0} =$$

$$= +\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2} = a^2$$

$$\int_{0}^{a}\left|x-\frac{a}{2}\right|dx = 2\int_{0}^{a/2}\left(-x+\frac{a}{2}\right)dx = 2\left[\frac{-x^2}{2}+\frac{ax}{2}\right]_{0}^{a/2} =$$

$$= 2\left(-\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4}$$

$$a^2 = K\cdot\frac{a^2}{4} \Rightarrow \boxed{K=4}$$

5.- $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$

a)

$$|A| = (1+a)^3+1+1-(1+a)-(1+a)-(1+a) = \cancel{1}+\cancel{3a}+3a^2+a^3+\cancel{2}-\cancel{3}-\cancel{3a} =$$

$$= a^3+3a^2 = a^2(a+3)$$

$$|A|=0 \rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$$

- Si $\left.\begin{matrix} a\neq 0 \\ a\neq -3 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ S.C.D.

- Si $a=0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{matrix}\right\}$ S.C.I.

- Si $a=-3 \rightarrow \left.\begin{matrix} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=10 \end{matrix}\right\}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \boxed{\text{rango } A = 2}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}} & 1 & 1 \\ & 1 & -2 \\ 1 \quad 1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 27 \Rightarrow \boxed{\text{rango } A^+ = 3}$$

b) • Si $a=-3 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1-y-z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{array}}$

• Si $\left.\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a\neq -3 \end{array}\right| \rightarrow$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1+a & 1 \\ 1+a^2 & 1 & 1+a \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 0 \\ a^2 & 0 & a \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{\cancel{a^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\cancel{a^2}(a+3)} =$$

$$= \frac{1-a-1}{a+3} = \boxed{\frac{-a}{a+3}}$$

$F2 \rightarrow F2-F1$
$F3 \rightarrow F3-F1$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1+a^2 & 1+a \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ -a & a & 0 \\ -a & a^2 & a \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{\cancel{a^2}\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{\cancel{a^2}(a+3)}$$

$$= \frac{1+a-a+1+1}{a+3} = \boxed{\frac{3}{a+3}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1+a \\ 1 & 1 & 1+a^2 \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ -a & a & a \\ -a & 0 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{\cancel{a^2}\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix}}{\cancel{a^2}(a+3)} =$$

$$= \frac{a+a^2-1+1+a}{a+3} = \boxed{\frac{a^2+2a}{a+3}}$$

$$\boxed{(x,y,z) = \left(\boxed{\frac{-a}{a+3}}, \boxed{\frac{3}{a+3}}, \boxed{\frac{a^2+2a}{a+3}}\right)}$$

---

6. a) x = nº de TV vendidos $\rightarrow$ Gana $400x$ €
y = nº de DVD vendidos $\rightarrow$ Pierde $200y$ €

$$\left.\begin{array}{r} 400x-200y=10000 \\ y = mx \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 400x-200y=10000 \\ -mx+y=0 \end{array}\right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 400 & -200 \\ -m & 1 \end{pmatrix}$$

$|M| = 400-200m \rightarrow m=2$

• Si $m\neq 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M)=2 \\ r(M^*)=2 \\ m=2 \end{array}\right| \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

• Si $m=2 \rightarrow |400| = 400 \neq 0 \Rightarrow r(M)=1$

$$M^* = \begin{pmatrix} 400 & -200 & 10000 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 400 & 10000 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 20000 \Rightarrow r(M^*)=2$$

$\rightarrow$ S. Incompatible.

Por lo tanto, para cualquier valor de m, salvo $m=2$, el sistema tendrá solución única. Para $m=2$, el sistema no se puede resolver. No es posible que $m=2$.

b)

$$\left.\begin{array}{r} 400x - 200y = 10000 \\ -mx + y = 0 \\ x = y \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} 400x - 200y = 10000 \\ -mx + y = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 400 & -200 \\ -m & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 400 & -200 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -200 \neq 0 \Rightarrow r(M) = 2$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 400 & -200 & 10000 \\ -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 400 & -200 & 10000 \\ -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10000m - 10000$$

$$|M^*| = 0 \Rightarrow m = 1$$

- Si $m \neq 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M^*) = 3 \\ r(M) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ S. Incompatible
- Si $m = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r(M^*) = 2 \\ r(M) = 2 \\ n = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ S. Compatible Determinado

Como se trata de una situación real, el sistema debe tener solución, m debe ser entonces 1.

$$\left.\begin{array}{r} 400x - 200y = 10000 \\ -x + y = 0 \\ \cancel{x - y = 0} \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 25 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 25 \end{array}}$$ es la solución.