SOLUCIONES MODELO 4 - 5EV. MATEMÁTICAS II - (7/5/18)

Ejercicio 1

a) El determinante de la matriz de coeficientes, $\det(A) = -m^2 + m$, se anula si $m = 1$ o $m = 0$ y se tiene:

$$(A;B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1 & 1-m \\ 0 & m-1 & m-1 & 1+m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & m-2 & 2m \end{array}\right)$$

Para $m \neq 0, 1$, es $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A;B)$ y el sistema es compatible determinado.
Si $m = 0$, es $\mathrm{rg}\,(A) = 2$, $\mathrm{rg}\,(A;B) = 3$ y el sistema es incompatible.
Si $m = 1$, es $\mathrm{rg}\,(A) = 2$, $\mathrm{rg}\,(A;B) = 3$ y el sistema es incompatible.

b) La solución para $m = -1$ es $\boxed{x = 1, y = 2, z = -2}$.

Ejercicio 2

a) El área pedida viene dada por

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \left((6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1\right)dx = \left[(27-3x)e^{\frac{x-4}{3}} - x\right]_2^4 = 13 - \frac{21}{e^{2/3}}$$

b) Se trata de encontrar el máximo de la función pendiente, $f'(x) = -\dfrac{1}{3}(x-3)e^{\frac{x-4}{3}}$, para lo que calculamos $f''(x) = -\dfrac{1}{9}xe^{\frac{x-4}{3}}$, que se anula solamente en $x = 0$, es positiva en $x < 0$ y negativa en $x > 0$. Por lo que el punto de pendiente máxima es el de abscisa $\boxed{x = 0}$.

c) La asíntota horizontal será $y = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6-x}{e^{(4-x)/3}}$. Calculamos este límite usando la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6-x}{e^{(4-x)/3}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{\frac{-1}{3}e^{(4-x)/3}} = 0 \Rightarrow$ la asíntota es $\boxed{y = -1}$.

Ejercicio 3

a) El punto simétrico de B, respecto a π_2 es $B'(1,1,1)$, ya que la recta perpendicular al plano es el eje OX y el punto medio entre B y B' es $(0,1,1)$, que está en π_2.

b) Un vector director de la recta pedida se puede obtener como producto vectorial de los vectores normales a los dos planos, $\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = (1,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,-1)$. Se obtiene la recta $\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}}$.

c) El ángulo α formado por los dos planos es el ángulo agudo que forman sus vectores normales.

$$\cos(\alpha) = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego forman un ángulo de $\pi/4$ radianes.

---

4. $f'(x) = 2\sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = \int 2\sin(5x - \pi/2)\,dx = \frac{-2}{5}\int -5\sin\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)dx = -\frac{2}{5}\cos(5x-\pi/2) + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{2}{5}\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$1 = -\frac{2}{5}\cos(2\pi) + C$$

$$1 = -\frac{2}{5}\cdot 1 + C \Rightarrow \boxed{C = 7/5} \Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{2}{5}\cos\left(5x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{7}{5}}$$

$$f''(x) = 2\cos\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 5 = \boxed{10\cos\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

---

5. i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{rango } A \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a + a - 1 - 2 - a^2 = -a^2 + 3a - 2$$

$$-a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

- Si $\left.\begin{matrix} a \neq 2 \\ a \neq 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ rango $A = 3 \Rightarrow$ S.C.D.

- Si $a = 2$: $\boxed{\text{rango } A = 2}$

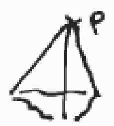
$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{matrix}\right\} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\text{rango } A^* = 2} \Rightarrow S$$

$$\left.\begin{matrix} x + y = 1 - z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{matrix}\right\} \qquad \boxed{\begin{matrix} x = 1 - z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix}}$$

- Si $a = 1$: $\boxed{\text{rango } A = 2}$

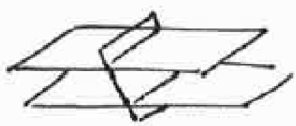
$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{S. Incomp.}}$$

ii)
- Si $\left.\begin{matrix} a \neq 2 \\ a \neq 1 \end{matrix}\right| \rightarrow$ Los 3 planos tienen un punto común.



- Si $a = 2 \rightarrow$ Los 3 planos tienen una recta común

- Si $a = 1 \rightarrow$ El 1er y 3er plano son paralelos, el 2º es secante.



6.- $f(x)=\frac{900x+200}{x+10}$, $x>0$

f(x) no está definida en $x=-10$, pero no cumple que $x>0$.

$f'(x)=\frac{900(x+10)-(900x+200)}{(x+10)^2}=\frac{\cancel{900x}+9000-\cancel{900x}-200}{(x+10)^2}=\frac{8800}{(x+10)^2}$

$f'(x)=0 \longrightarrow \frac{8800}{(x+10)^2}=0$; $8800=0$ ✳ f' no se anula.

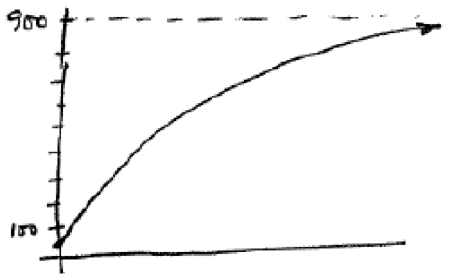
	0		$+\infty$
f'		+	
f		↗	

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{900x+200}{x+10}=\frac{\infty}{\infty}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{900+\frac{200}{x}}{1+\frac{10}{x}}=\frac{900+0}{1+0}=$

$=900$

x	y
0^+	20
$+\infty$	900



a) La temperatura siempre está aumentando

b) La temperatura tiende a 900°C, pero sin alcanzarla nunca. Por lo tanto no llegará a 1000°C y no habrá que apagar el horno.