EJERCICIOS ADICIONALES DE MATRICES CON SOLUCIONES - MATEMÁTICAS II - NACIONAL

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular si es posible:

a) $A + B$ **b)** AC **c)** CB y C^tB **d)** $(2A+B)C$

Solución

a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & -1+1 \\ 3+4 & 2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

b) $AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+(-1)2 & 2.3+(-1)(-1) & 2.5+(-1)1 \\ 3.1+2.2 & 3.3+2(-1) & 3.5+2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 7 & 7 & 17 \end{pmatrix}$

c) El producto CB no se puede efectuar porque el número de columnas de C y el número de filas de B no coinciden.

En cambio, el producto C^tB si que se puede realizar porque el número de columnas de C^t y el número de filas de B es el mismo.

En primer lugar se calcula la matriz traspuesta de C intercambiando sus filas y sus columnas,

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, $C^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0+2.4 & 1.1+2(-2) \\ 3.0+(-1)4 & 3.1+(-1)(-2) \\ 5.0+1.4 & 5.1+1(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

d) Para calcular $(2A+B)C$ se realiza en primer lugar la operación del paréntesis:

$$2A+B = \begin{pmatrix} 2.2 & 2(-1) \\ 2.3 & 2.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & (-2)+1 \\ 6+4 & 4+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, $(2A+B)C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1+(-1)2 & 4.3+(-1)(-1) & 4.5+(-1)1 \\ 10.1+2.2 & 10.3+2(-1) & 10.5+2.1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 13 & 19 \\ 14 & 28 & 52 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular si es posible:

a) ABC **b)** $C^t\left(\frac{1}{2}B-A\right)$ **c)** A^2, B^2 y C^2

Solución

a) Para calcular ABC, se calcula primero el producto AB y el resultado se multiplica a la derecha por la matriz C.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0+(-1)4 & 2.1+(-1)(-2) \\ 3.0+2.4 & 3.1+2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, $(AB)C = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4).1+4.2 & (-4)3+4(-1) & (-4).5+4.1 \\ 8.1+(-1)2 & 8.3+(-1)(-1) & 8.5+(-1)1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -16 & -16 \\ 6 & 25 & 39 \end{pmatrix}$$

Por la propiedad asociativa del producto de matrices, el resultado sería el mismo si primero se calculase BC y el resultado se multiplicara a la izquierda por A.

b) En primer lugar se calcula la matriz traspuesta de C intercambiando sus filas y sus columnas,

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se calcula $\frac{1}{2}B-A$,

$$\frac{1}{2}B-A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.1 \\ \frac{1}{2}.4 & \frac{1}{2}(-2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 & \frac{1}{2}-(-1) \\ 2-3 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Así, $C^t\left(\frac{1}{2}B-A\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2)+2(-1) & 1\frac{3}{2}+2(-3) \\ 3(-2)+(-1)(-1) & 3\frac{3}{2}+(-1)(-3) \\ 5(-2)+1(-1) & 5\frac{3}{2}+1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{-9}{2} \\ -5 & \frac{15}{2} \\ -11 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

c) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2+(-1)3 & 2(-1)+(-1)2 \\ 3.2+2.3 & 3(-1)+2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0+1.4 & 0.1+1(-2) \\ 4.0+(-2)4 & 4.1+(-2)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

No se puede calcular $C^2 = CC$, ya que C no es una matriz cuadrada.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular AB y BA, ¿coinciden los resultados?.

b) Calcular $(A + B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$, ¿coinciden los resultados?.

c) Calcular $A^2 - B^2$ y $(A + B)(A - B)$, ¿coinciden los resultados?.

Solución

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+6.2+3.3 & 2.1+6(-4)+3.5 & 2.1+6.2+3.7 \\ 0.1+9.2+5.3 & 0.1+9(-4)+5.5 & 0.1+9.2+5.7 \\ -6.1+2.2+1.3 & -6.1+2.(-4)+1.5 & -6.1+2.2+1.7 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 23 & -7 & 35 \\ 33 & -11 & 53 \\ 1 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2+1.0+1(-6) & 1.6+1.9+1.2 & 1.3+1.5+1.1 \\ 2.2+(-4)0+2(-6) & 2.6+(-4)9+2.2 & 2.3+(-4).5+2.1 \\ 3.2+5.0+7(-6) & 3.6+5.9+7.2 & 3.3+5.5+7.1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 17 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ -36 & 77 & 41 \end{pmatrix}$$

No coinciden los resultados, es decir, $AB \neq BA$, lo que significa que el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa.

b) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 6+1 & 3+1 \\ 0+2 & 9+(-4) & 5+2 \\ -6+3 & 2+5 & 1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3.3+7.2+4(-3) & 3.7+7.5+4.7 & 3.4+7.7+4.8 \\ 2.3+5.2+7(-3) & 2.7+5.5+7.7 & 2.4+5.7+7.8 \\ (-3)3+7.2+8(-3) & (-3)7+7.5+8.7 & (-3)4+7.7+8.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 84 & 93 \\ -5 & 88 & 99 \\ -19 & 70 & 101 \end{pmatrix}$$

A continuación, se calcula $A^2 + 2AB + B^2$,

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2+6.0+3(-6) & 2.6+6.9+3.2 & 2.3+6.5+3.1 \\ 0.2+9.0+5(-6) & 0.6+9.9+5.2 & 0.3+9.5+5.1 \\ -6.2+2.0+1(-6) & -6.6+2.9+1.2 & -6.3+2.5+1.1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{pmatrix}$$

La matriz AB se ha calculado en el apartado a), así

$2AB = 2\begin{pmatrix} 23 & -7 & 35 \\ 33 & -11 & 53 \\ 1 & -9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.23 & 2(-7) & 2.35 \\ 2.33 & 2(-11) & 2.53 \\ 2.1 & 2(-9) & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & -14 & 70 \\ 66 & -22 & 106 \\ 2 & -18 & 10 \end{pmatrix}$

$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+1.2+1.3 & 1.1+1(-4)+1.5 & 1.1+1.2+1.7 \\ 2.1+(-4)2+2.3 & 2.1+(-4)(-4)+2.5 & 2.1+(-4)2+2.7 \\ 3.1+5.2+7.3 & 3.1+5(-4)+7.5 & 3.1+5.2+7.7 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & -14 & 70 \\ 66 & -22 & 106 \\ 2 & -18 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -14+46+6 & 72+(-14)+2 & 39+70+10 \\ -30+66+0 & 91+(-22)+28 & 50+106+8 \\ -18+2+34 & -16+(-18)+18 & -7+10+62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 60 & 119 \\ 36 & 97 & 164 \\ 18 & -16 & 65 \end{pmatrix}$$

En conclusión, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

La igualdad que en realidad se cumple es $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$, y sólo en aquellos casos en los que se verifique que $AB = BA$, se cumplirá que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

c) En el apartado b) se han calculado A^2 y B^2, por tanto,

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14-6 & 72-2 & 39-10 \\ -30-0 & 91-28 & 50-8 \\ -18-34 & -16-18 & -7-62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 70 & 29 \\ -30 & 63 & 42 \\ -52 & -34 & -69 \end{pmatrix}$$

Para calcular $(A + B)(A - B)$, se ha de calcular cada uno de los factores, el primero se ha calculado en el apartado b) y el segundo es,

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 6-1 & 3-1 \\ 0-2 & 9-(-4) & 5-2 \\ -6-3 & 2-5 & 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 13 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 13 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3.1+7(-2)+4(-9) & 3.5+7.13+4(-3) & 3.2+7.3+4(-6) \\ 2.1+5(-2)+7(-9) & 2.5+5.13+7(-3) & 2.2+5.3+7(-6) \\ (-3).1+7(-2)+8(-9) & (-3).5+7.13+8(-3) & (-3).2+7.3+8(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 & 94 & 3 \\ -71 & 54 & -23 \\ -89 & 52 & -33 \end{pmatrix}$$

En conclusión, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.

La igualdad que en realidad se cumple es $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$, y al ser $AB \neq BA$, como se ha comprobado en el apartado a), no se verifica $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

4. Mediante operaciones elementales transformar A en una matriz escalonada equivalente y calcular el rango de A.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

No existe un solo conjunto de operaciones elementales con las que escalonar una matriz. Por tanto, para cada matriz, la matriz escalonada equivalente que se obtiene no es única, aunque todas han de tener el mismo número de filas nulas ya que el rango de una matriz es único.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 2F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -10 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg $A = 2$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 3F_1,\ F_3 \to F_3 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -11 \\ 0 & -22 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La primera operación elemental que se realiza, intercambiar la primera y segunda fila, tiene como objetivo obtener como "elemento pivote" el valor 1, lo que facilitará las posteriores operaciones elementales.

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg $A = 2$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \to (1/2)F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

La primera operación elemental que se realiza, multiplicar la primera fila por $\frac{1}{2}$, tiene como objetivo obtener como "elemento pivote" el valor 1, lo que facilitará las posteriores operaciones elementales.

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg $A = 2$.

Otra manera de escalonar la matriz A es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to 2F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$$

d) La matriz A se puede escalonar haciendo operaciones elementales por filas y por columnas, como se muestra a continuación.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & -7 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 + 2F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 7 & -4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene tres filas no nulas, por tanto, rg $A = 3$.

5. Mediante operaciones elementales, determinar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro real a.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Solución

a) Escalonamos la matriz A mediante operaciones elementales por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & a-12 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a A que se ha obtenido depende de que la expresión $a - 12$ sea nula o no lo sea. Así:

- si $a = 12$, entonces la matriz escalonada tiene una fila no nula y, por tanto, rg $A = 1$
- si $a \neq 12$, entonces la matriz escalonada tiene dos fila no nulas y, por tanto, rg $A = 2$

b) Escalonamos la matriz B mediante operaciones elementales por filas:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 3-3a & 1 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a B que se ha obtenido es 2 independientemente de lo que valga el parámetro a. Así, rg $B = 2$ para cualquier valor de a.

c) Escalonamos la matriz C mediante operaciones elementales por filas:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 3F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 4-2a \\ 0 & 6-2a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to (4-2a)F_3 - (6-2a)F_2} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 4-2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a C que se ha obtenido depende de que la expresión $4 - 2a$ sea nula o no lo sea. Así:

- si $a = 2$, entonces la matriz escalonada tiene una fila no nula y, por tanto, rg $C = 1$
- si $a \neq 2$, entonces la matriz escalonada tiene dos fila no nulas y, por tanto, rg $C = 2$

d) Escalonamos la matriz D mediante operaciones elementales por filas:

$$D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a D que se ha obtenido depende de que las expresiones $1 - a$ y $2 - a - a^2$ sean nulas o no lo sean. Teniendo en cuenta que

$$2 - a - a^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

se distinguen los siguientes casos:

- si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces la matriz escalonada tiene tres filas no nulas y, por tanto, rg $D = 3$
- si $a = -2$ entonces la matriz escalonada tiene dos filas no nulas y, por tanto, rg $D = 2$

- si a = 1 entonces la matriz escalonada tiene una fila no nula y, por tanto, rg D = 1

6. Sabiendo que las siguientes matrices tienen inversa, calcularla mediante operaciones elementales.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Solución

Se coloca la matriz identidad a la derecha de A obteniéndose la nueva matriz $(A|I_n)$ sobre la que se realizan operaciones elementales por filas hasta que en el lugar de A queda la matriz identidad.

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to (1/5)F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 7F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{-7}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - 2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{-7}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to (5/2)F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Se puede obtener el mismo resultado con otras operaciones elementales, por ejemplo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to 5F_2 - 7F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 5 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - 2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 15 & -10 \\ 0 & 2 & -7 & 5 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to (1/5)F_1,\ F_2 \to (1/2)F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 + F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to (1/5)F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - F_2,\ F_3 \to F_3 + F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-9}{5} \end{array}\right) \underset{\approx}{F_3 \to (1/3)F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{-3}{5} \end{array}\right)$$

Observar que el proceso seguido para obtener la matriz identidad en el lugar de B consiste en conseguir, mediante operaciones elementales por filas, que en cada columna sean ceros todos los elementos excepto el correspondiente a la diagonal principal que es el que se considera como "elemento pivote". Así, con la primera equivalencia se consigue que el "elemento pivote" de la primera columna sea 1, lo que facilita las posteriores operaciones elementales. En la segunda se consigue hacer 0 los dos elementos de la primera columna que no están en la diagonal principal. En la tercera equivalencia se consigue que el "elemento pivote" de la segunda columna sea 1. En la cuarta se hacen 0 los dos elementos de la segunda columna que no están en la diagonal principal. Finalmente, en la quinta equivalencia se hace 1 el elemento de la tercera columna que está en la diagonal principal y, como los otros dos elementos de esta columna ya son cero, se termina el proceso puesto que se ha obtenido la matiz identidad en el lugar que estaba B.

Por tanto, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$

c) En este caso, en lugar de seguir el mismo proceso que en el apartado anterior, primero se triangulariza la matiz C superiormente (se hacen ceros por debajo de la diagonal principal) y después inferiormente (se hacen ceros por encima de la diagonal principal) obteniéndose la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to (1/2) F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 4F_1,\ F_3 \to F_3 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & -11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & -7 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} \end{array}\right) \underset{\approx}{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & -11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{\approx}{F_3 \to (1/4) F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & -11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - 3F_3,\ F_2 \to F_2 + 11F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & -7 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{-7}{4} & \frac{-5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\underset{\approx}{F_2 \to (-1/7) F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{5}{56} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \underset{\approx}{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{28} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{56} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{5}{56} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

Por tanto, $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{28} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{56} \\ \frac{-11}{28} & \frac{1}{4} & \frac{5}{56} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$