B. Producto de matrices por escalar

$$k \cdot A_{m\times n} = \ k \cdot a_{i\times j} \quad ; k \in \mathbb{R}$$

<u>Ejemplo</u>:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 & -15 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ -15 & 0 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

C. Producto de matrices

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B_{p\times q} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \cdot B_{p\times q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \cdot B_{p\times q} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \cdots \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

C. Producto de matrices

Ejemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times3} \cdot B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 9 \\ 4 & 10 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot2+1\cdot(-2)+(-5)\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot3+(-5)\cdot4 & 3\cdot2+1\cdot(-2)+(-5)\cdot(-1) \\ 4\cdot2+2\cdot(-2)+0\cdot0 & 4\cdot1+2\cdot3+0\cdot4 & 4\cdot2+2\cdot(-2)+0\cdot(-1) \\ 2\cdot2+(-1)\cdot(-2)+0\cdot(-1) & 2\cdot1+(-1)\cdot3+0\cdot4 & 2\cdot2+(-1)\cdot(-2)+0\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

C. Producto de matrices

Condiciones de aplicación:

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \cdot B_{p\times q}$$

$$\Downarrow$$

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times q} = S_{m\times q}$$

$$\cancel{A_{3\times3} \cdot B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

→ Num. Columnas de la 1ª matriz = Num. Filas de la 2ª matriz

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\times3} \cdot B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} 16 & 1 & -10 \\ 16 & 6 & -20 \end{pmatrix}$$

→ No es necesario que el Num. filas de la 1ª matriz sea igual al Num. de columnas de la 2ª matriz

C. Producto de matrices

Propiedades:

· **Asociativa:** $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

· **Distributiva respecto a la suma:** $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

· **El producto de matrices NO es siempre conmutativo:** $A \cdot B \neq B \cdot A$

· **Matriz identidad:** $A \cdot I = I \cdot A = A$

D. Potencias de una matriz cuadrada

Dada una <u>matriz cuadrada</u> *A, se definen sus potencias sucesivas como:*

$A^2 = A \cdot A$

$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A$

$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = A^3 \cdot A$

...

$A^n = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = A^{n-1} \cdot A$

E. Traspuesta de matrices

La matriz traspuesta de una matriz A_{mxn} se obtiene de intercambiar sus Filas con las Columnas

$$(A_{mxn})^t = A_{nxm}$$

$$A = A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada es <u>simetrica</u> si coincide con su traspuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

1.3 Rango de una matriz

<u>Operaciones que se pueden hacer con matrices</u>

a) Intercambiar el orden de sus filas

b) Multiplicar o dividir una fila per un Num. diferente de 0

c) Sumar filas entre ellas

$$A = \begin{array}{c} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2' = 2 \cdot f_2 \longrightarrow \begin{array}{c} f_1: \\ f_2': \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$f_2' = f_2 + f_3 \longrightarrow \begin{array}{c} f_1: \\ f_2': \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ -4 & 2 & 3 & -4 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad f_1' = 2 \cdot f_1 - 3 \cdot f_2 \longrightarrow \begin{array}{c} f_1': \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -10 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

1.3 Rango de una matriz

<u>Resolución por *método de Gauss*</u>:

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} f_2{}' = 3 \cdot f_1 - f_2 \longrightarrow \begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} f_3{}' = 5 \cdot f_1 + f_3 \longrightarrow \begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 7 & -4 \end{pmatrix} f_3{}' = 2 \cdot f_2 - f_3 \longrightarrow \begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{pmatrix}$$

1.3 Rango de una matriz

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \; f_2 = f_2 + 2 \cdot f_1 \longrightarrow \begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \; f_3' = f_3 - 3 \cdot f_1 \longrightarrow \begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & -1 & -9 \end{pmatrix} \; f_3' = f_3 + f_2 \longrightarrow \begin{array}{l} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Rango de una matriz

Definición
:

$$\begin{array}{c} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} f_1: \\ f_2: \\ f_3: \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de una matriz es el Num. de files independientes que tiene (vectores indep.)

1.4 Matriz inversa.

Dada una matriz A, si inversa A^{-1} cumple que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

<u>**Método directo de resolució n**</u>

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -1 \cdot a + 3 \cdot c = 1 \\ -1 \cdot b + 3 \cdot d = 0 \\ 5 \cdot c = 0 \\ 5 \cdot d = 1 \end{cases}$$

1.4 Matriz inversa 3x3

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|}$$

$|A|$ Determinante de la matriz

A^* Matriz adjunta

1.4 Matriz inversa.

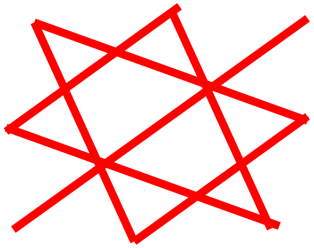
$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|}$$

a.- <u>Determinante de una matriz 3x3 (MET. SARRUS)</u>

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$|A| = (2\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot 0\cdot 0) - (5\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 0)$$

$$|A| = 3$$

1.4 Matriz inversa. El determinante

Propiedades del determinante

1.- **det A = det (A^t)** $\leftrightarrow$ $|A| = |A^t|$

2.- Si en un Det. se intercambian dos Filas o Col --> su valor cambia de signo.

3.- **Det A = 0** si

--> Una Fila vale 0
--> 2 filas son equivalentes
--> 2 filas son iguales
--> 1 fila se puede expresar como CL de otras

1.4 Matriz inversa. El determinante

1.- <u>**det A = det (A^t)**</u> $\leftrightarrow$ |A| =| A^t |

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = 3$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = 3$$

1.4 Matriz inversa. El determinante

2.- Si en un determinante se intercambian 2 filas o columnas, **el valor de su signo cambia**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A|=3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A|=-3$$

1.4 Matriz inversa. El determinante

3.- **<u>Det A = 0</u>** si
- --> **Una Fila vale 0**
- --> **2 filas son equivalentes**
- --> **2 filas son iguales**
- --> **1 fila se puede expresar como CL de otras**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow |A|=0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A|=0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 16 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow |A|=0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow |A|=0$$

1.4 Matriz inversa. El determinante

Propiedades del determinante

4.- Multiplicar un determinante por un Num. real equivale a multiplicar una fila o columna por este Num.

5.- Det (A·B) = Det A · Det B

6.- Si todos los elementos de una fila o una columna están formados per dos sumandos, este determinante se puede descomponer en la suma de dos determinantes.

1.4 Matriz inversa. El determinante

4.- Multiplicar un determinante por un Num. real equivale a multiplicar una fila o columna per este Num.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \cdot 5 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 0 \\ 1 & 0 & 2 \cdot 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

1.4 Matriz inversa. El determinante

5.- Det (A·B) = Det A · Det B $\leftrightarrow$ |A·B| =| A|·| B|

6.- Si todos los elementos de una fila o una columna están formados per dos sumandos, este determinante se puede descomponer en la suma de dos determinantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1+a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & a & 1 \end{vmatrix}$$

1.4 Matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|}$$

b.- **<u>Matriz adjunta (i la su traspuesta)</u>**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \qquad = 3$$

Sustituimos cada uno de los elementos de la matriz pol su adjunto

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

1.4 Matriz inversa.

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|}$$

c.- <u>Matriz inversa 3x3</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} (A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ |A|=3 \end{cases}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5 Ecuaciones matriciales.

La matriz inversa se puede hacer servir para resolver **ecuacione matriciales**

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \text{B=}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{C=}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Buscamos una matriz que cumpla que:

$$A \cdot X + B = C \longrightarrow A \cdot X = C - B$$

No se puede: $\cancel{X = \frac{C - B}{A}}$

Solución:

$$A^{-1}(\boldsymbol{A \cdot X = C - B})$$

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1}(C - B)$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1}(C - B) \longrightarrow I \cdot X = A^{-1}(C - B) \longrightarrow X = A^{-1}(C - B)$$