

Matrices y determinantes en las PAU (Matemáticas II) de Asturias

Junio 94

i) Define rango de una matriz. ii) Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3, ¿cómo puede variar el rango si quitamos una columna?. Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante valdrá 2? Razona las respuestas.

Sept 94

Dada la ecuación

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$$

se pide: i) Razonar que es polinómica de grado ≤ 3 . ii) Obtener, sin desarrollar el determinante, sus soluciones.

Junio 95

i) Producto de matrices: definición, condiciones para su realización. Si $A \in M_{m \times n}$ (la matriz A tiene m filas y n columnas), $B \in M_{n \times p}$ y $C \in M_{q \times r}$, ¿qué condiciones deben cumplir p, q y r para que las operaciones que se indican a continuación puedan ser efectuadas y cuál es el orden de la matriz resultante?: a) ACB b) $A(B+C)$.
ii) Siendo

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} B$$

con A y B matrices cuadradas de orden 2, ¿debe ser necesariamente $A = B$?

Sept 95

i) Definir rango de una matriz explicando cada concepto que interviene en la definición.
ii) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 cuyo rango es 2, ¿se alterará el rango de dicha matriz si a los elementos de una de sus columnas se les suman los correspondientes de otra de sus columnas? Razona la respuesta.

Junio 96

Aplicando propiedades de los determinantes (y sin desarrollar, ni aplicar la regla de Sarrus) responder razonadamente a las siguientes preguntas:

i) ¿Cómo variará el determinante de una matriz de orden 3 si se multiplica a cada elemento a_{ij} de la matriz por 2^{i-j} ?
ii) ¿La matriz, de orden 4, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$, tiene inversa? (a_{ij} es el elemento de la matriz perteneciente a la fila i y columna j)

Sept 96

Aplicando las propiedades de los determinantes y sin utilizar la regla de Sarrus, calcular razonadamente las raíces de la ecuación polinómica

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Enunciar las propiedades utilizadas.

Sept 96

i) Definir rango de una matriz explicando cada concepto que interviene en la definición.
ii) Calcular, según los valores de a, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Junio 97

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & k \end{pmatrix}$.

- Averiguar para qué valores de k existe alguna matriz P que cumpla, $N = PM$.
- ¿Tiene sentido hablar de la existencia de la matriz inversa de MN^t , para todo $k \in \mathbb{R}$? Si existe para $k = 0$, hallarla.
($N^t \equiv$ traspuesta de N).

Sept 97

- Si A es una matriz tal que $A^2 = I$, ¿se deduce que $A = I$? En caso afirmativo, probarlo, y en caso negativo, proponer un ejemplo aclaratorio.
- Si $A^3 = I$, demostrar que A es inversible, y calcular, en función de A , su inversa.
- Probar que si $AB = A$ y $BA = B$, entonces $A^2 = A$.

Junio 98

Dada la identidad matricial $X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

- ¿Cuáles son las dimensiones de una matriz solución de la identidad anterior?
- Calcula una solución.
- ¿Es única la solución? . Razona las respuestas.

Sept 98

- Define matriz triangular superior y calcula su determinante.
- Halla todas las matrices triangulares superiores, de orden dos, que verifican que su cuadrado es la matriz identidad.

Junio 99

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$

- ¿Cuándo el determinante de A es el seno de algún número real?
- Calcula la inversa de A cuando exista.
- Determina todos los pares (a, b) para los que A coincide con su inversa.

Sept 99

Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ donde λ es un número real.

- Halla los valores de λ para los cuales A no tiene inversa.
- Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ para el que la matriz bA tiene determinante 1.

Junio 00

- Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa.
- Si A es una de estas matrices, calcula su cuadrado.

Sept 00

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- Calcula las matrices que verifican la relación $|A| = |A + I|$
(I es la matriz identidad y $|A|$ representa el determinante de A)
- Calcula todas las matrices diagonales, que no poseen inversa y que verifican la relación anterior.
- ¿ Se verifica para cualquier par de matrices B y C la relación $|B + C| = |B| + |C|$? . Si no cierto pon un contraejemplo. Justifica todas las respuestas.

Junio 01Sea A una matriz $m \times n$

- a) ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?
- b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB es una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

c) Busca una matriz B tal que $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sept 01Sea la ecuación matricial $ABA = C$

- a) ¿Qué orden tiene la matriz solución B ?

b) Resuelve la ecuación cuando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 02

- a) Determinar la matriz X para que tenga solución la ecuación $C(A+X)B = I$, donde A , B y C son matrices no singulares de orden n e I la matriz identidad de orden n .

b) Aplicar el resultado anterior para $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sept 02

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$

- a) Calcular el valor de su determinante en función de a
- b) Encontrar su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

Sept 02

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

- a) Calcular las matrices C y D tales que $AC = BD = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
- b) Discutir y resolver el sistema $(C^{-1} - D^{-1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si C^{-1} y D^{-1} son las inversas de las matrices C y D indicadas en el apartado anterior.

Junio 03

- a) Si A es una matriz no singular y $(B - C)A = 0$, siendo 0 la matriz nula, comprobar que $B = C$.

b) Según el resultado del apartado anterior, cuando $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, la única matriz X que verifica la ecuación

$XA = 0$ es la matriz nula. ¿Es cierta esta afirmación? ¿Por qué?

Sept 03

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calcular su inversa, si existe.
- b) Encontrar la regla de cálculo de las sucesivas potencias A^n de A .
- c) Resolver la ecuación $X(A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 04

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ¿Para qué valores de x la matriz A posee inversa?
- Calcula la inversa de A para el valor $x = -1$.
- ¿Qué dimensiones debe tener una matriz B para que la ecuación matricial $A \cdot B = C \cdot D$ sentido? Calcula B para el valor $x = -1$.

Sept 04

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Discute el rango de A según los valores de m .
- ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$?
- Calcula X para $m = 0$.

Junio 05

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante k

¿Cuáles son los valores de los siguientes determinantes?

$$\text{a) } \begin{vmatrix} d & 2e & f \\ a & 2b & c \\ g & 2h & i \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a+b & b & 2c \\ d+e & e & 2f \\ g+h & h & 2i \end{vmatrix}$$

Sept 05

Resuelve las siguientes ecuaciones en la variable x

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & x & 1 \\ -x & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Junio 06

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real. Halla:

- Los valores de x para los que la matriz A posea inversa.
- La inversa de A para $x = 2$.
- Con $x = 5$, el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz bA tenga determinante 1.

Sept 06

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Estudia, en función de valores reales de k , si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa
- Lo mismo para la matriz $A \cdot B$

Junio 07

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1+a \end{pmatrix}$

- Estudia, en función de a , el rango de las matrices A y B .
- Calcula, para $a = -1$, la matriz X que verifica $A \cdot X = B$.

Sept 07

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- Comprobar que verifica $A^3 - I = O$, con I matriz identidad y O matriz nula.
- Calcula A^{13}
- Basándose en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2 X + I = A$.

Junio 08

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a, 2, 3)$ y $C = (4, 0, 2)$

- Halle los valores de x, y, z , para los que A no tiene inversa.
- Determine los valores de a para los que el sistema $B \cdot A = C$ tiene solución.
- Resuelva el sistema anterior cuando sea posible.

Sept 08

Se considera una matriz cuadrada A de orden tres que verifica la ecuación $A^2 = 6A - 9I$,

donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Expresa A^4 como combinación lineal de I y A .
- Estudie si la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $B^2 = 6B - 9I$. Determine si B tiene inversa y, si la tiene, calcúlela.

Junio 09

Se consideran las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 - a & 1 & a \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Según los valores de $a \in \mathbb{R}$, estudie el rango de P
- Para el caso $a = 1$, halle X tal que $P \cdot X = Q$

Sept 09

Dado el número real m , se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Halle los valores de m para los que la matriz A tiene inversa
- Para $m = 2$, halle, si existe, la inversa de A

c) Para $m = 2$, calcule el vector X que verifique $A \cdot X = B$ siendo $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Junio 10**f. general**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Calcule los valores de m para los que la matriz $A - mI$ no tiene inversa.
- Calcule, si existe, la inversa de la matriz $A - 2I$.

Nota: I es la matriz identidad de orden 3.

Junio 10**f. especif.**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$

- Resuelva la ecuación $\det(A) = 0$.
- Calcule el rango de la matriz A según los valores de x .

Nota: $\det(A)$ denota el determinante de la matriz A .

Sept 10**f. general**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

- Calcule el determinante de A .
- Indique los valores de m para los que A tiene matriz inversa.
- Halle, si existe, la matriz inversa de A cuando $m = 1$.

Sept 10**f. especif**

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

- Halle, si existe, la matriz inversa de M .
- Calcule la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$

Junio 11**f. general**

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Obtenga los valores del número real a para los que A tiene matriz inversa.

b) Halle, si es posible, la matriz inversa de A en el caso $a = 0$.

Junio 11**f. especif.**

Dado el número real a se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Obtenga la matriz inversa de A en los casos en que exista.

Julio 11**f. general**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -a \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$

a) Estudie su rango según los valores del número real a .

Julio 11**f. especif.**

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $A X = B$

Junio 12**f. general**

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación $\det(A - x \cdot I_3) = 0$

Junio 12**f. especif.**

Dado el número real a se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & -1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Busque, si es posible, la matriz inversa de A en el caso $a = 0$.

Julio 12**f. general**

Dados los números reales a, b, c, x , se consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} x & b & c-4 \\ a & x & 3 \\ b & c & x \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de a, b, c, x , para los cuales A es antisimétrica.

(Recuerde que la matriz A es antisimétrica si $A^t = -A$).

b) Si $a = b = c = 1$, halle el rango de A según los valores de x .

c) Si $a = b = c = 0$, resuelva la ecuación $|A + A^t| = 0$.

Nota: A^t denota la matriz traspuesta de A .

Julio 12**f. especif.**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcule, si es posible, la matriz inversa de la matriz A .

b) Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $X \cdot A = B$.

Julio 12**f. especí**

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ c & b & a-x \end{pmatrix}$

- a) Obtenga el polinomio $p(x) = \text{Det}(A)$.
 b) Si $c=0$, busque las raíces de $p(x)$ dependiendo de a y b .

Junio 13**f. general**

Dado el número real a se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Halle el rango de la matriz

$A^2 - A^t$ según los distintos valores de a .

Nota: A^t es la matriz traspuesta de A .

Junio 13**f. especí**

Dado el número real a se considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Obtenga los valores del número real a para los que la matriz A tiene inversa.
 b) Busque, si es posible, la matriz inversa de A cuando $a=0$.

Julio 13**f. general**

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -a & 2 & 0 \\ 1 & -1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$.

- a) Obtenga los valores de a para los que $\det(A) = 0$.

Julio 13**f. especí**

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Escriba factorizado el polinomio $p(x) = \det(A - xI_3)$ donde I_3 es la matriz identidad de orden 3.
 b) Busque las raíces de $p(x)$.