

## Sistemas Lineales de Ecuaciones en las PAU (Matemáticas 2) de Asturias

- Junio 94** i) Estudiar, para los diferentes valores del parámetro  $a$ , la existencia de soluciones del sistema
- $$\begin{aligned}x + y + z &= a - 1 \\2x + y + az &= a \\x + ay + z &= 1\end{aligned}$$
- y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.
- ii) Teniendo en cuenta que cada ecuación del sistema representa un plano, interpretar geoméricamente el estudio del apartado i).
- Sept 94** i) Definir sistemas homogéneos. ii) Demostrar que todo sistema homogéneo siempre tiene solución. iii) ¿En qué condiciones un sistema homogéneo admite más de una solución?
- Junio 95** Dado el sistema
- $$\begin{aligned}x + y - z &= 2 \\mx + y + z &= 1 \\x - y + 3z &= 1 \\4x + 2y &= m\end{aligned}$$
- i) Estudiarlo, según los valores de  $m$ , y resolverlo cuando sea compatible. ii) Interpretar geoméricamente el estudio del apartado i). Razona las respuestas.
- Sept 95** Determinar para qué valores del parámetro  $a$  el sistema
- $$\begin{aligned}ax + y + a^2z &= 3 \\-x - 7y + 8z &= 0 \\x + a^3y + a^2z &= -3\end{aligned}$$
- admite como solución  $x = 1, y = 1, z = 1$ , y resolverlo en estos casos, comprobando que, efectivamente,  $x = 1, y = 1, z = 1$  es solución del sistema.
- Junio 96** i) Enunciar el teorema de Rouché-Frobenius.  
ii) Dados dos sistemas lineales con dos incógnitas tales que difieren sólo en los términos independientes, si uno de ellos tiene infinitas soluciones, ¿puede el otro tener solución única? Razona la respuesta.  
iii) Resolver geoméricamente el apartado ii) de forma razonada.
- Sept 97** i) Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, hallar las condiciones necesarias y suficientes para que la suma de dos soluciones, o el producto de una solución por un número real  $c \neq 1$  sea también solución.  
ii) Definir sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. Enunciar dos transformaciones elementales que conviertan un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente. Construir dos sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, equivalentes, tales que las ecuaciones del segundo sean distintas de las del primero.
- Junio 98** Dados los sistemas
- $$S_1 : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y = 8 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x - z = 6 \\ 2x - 2z = 12 \end{cases}$$
- i) Halla las soluciones comunes.  
ii) Haciendo uso únicamente del número de soluciones obtenidas en el apartado anterior ¿Puede cada uno de los sistemas definir los puntos de un plano?
- Sept 98** Sea  $v = (1, 2)$ , solución de un sistema homogéneo con matriz de coeficientes  $A$ , cuadrada y de orden 2 y con todos los elementos no nulos.
- i) ¿Cuál es el rango de  $A$ ? Razona la respuesta.  
ii) Utilizando todos los elementos de la matriz  $A$ , construir dos vectores perpendiculares a  $v$ .  
iii) ¿Es posible que los vectores construidos en el apartado anterior no sean uno múltiplo del otro?

## Junio 99

i) Determina una matriz  $A$  para que el sistema homogéneo  $AX=0$  sea equivalente a la

$$\text{ecuación matricial } (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

ii) Calcula las soluciones de módulo uno. Justifica las respuestas.

## Junio 00

Se considera el sistema de ecuaciones 
$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

i) Calcula los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  sabiendo que el punto  $P=(2,-1)$  satisface la primera ecuación y el punto  $Q=(2,0)$  satisface la segunda.

ii) ¿Es compatible y determinado el sistema que resulta al sustituir los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  calculados?. Justifica las respuestas.

## Sept 00

Dado el sistema 
$$S = \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

i) Añade una tercera ecuación al sistema  $S$  de modo que la verifique el punto  $P = (-4, 1, 0)$  y el sistema formado por las tres ecuaciones tenga la misma solución que  $S$ .

ii) ¿Pertencen a un mismo haz de planos los definidos por cada una de las tres ecuaciones?.

## Junio 01

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x - y + z = \lambda \end{cases}$$

a) Discute su compatibilidad según los valores de  $\lambda$

b) Resuélvelo para  $\lambda = 3$

## Sept 01

Dado el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 1 \\ x + (1+a)y + z = 1+a \\ x + y + (1+a)z = 1+a^2 \end{cases}$$

a) Discute la compatibilidad del sistema según los valores de  $a$

b) Resuélvelo cuando sea compatible.

## Junio 02

Dado el sistema 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \\ 5x + \lambda y + 3z = 5 \end{cases}$$

a) Discutir su compatibilidad para los distintos valores de  $\lambda$

b) Resolverlo para  $\lambda = -3$

**Junio 03**

$$\text{Sea el sistema } \begin{cases} x - 3z = -1 \\ y - t = 2 \\ -3y + 2z = 0 \\ -4x + \lambda t = -5 \end{cases}$$

- Discutir su compatibilidad según los distintos valores de  $\lambda$
- Resolverlo para  $\lambda = 7$ .

**Sept 03**

$$\text{Discutir y resolver para los distintos valores de } m \text{ el sistema de ecuaciones } \begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y + m^2 z = m - 1 \end{cases}$$

**Junio 04**

Las edades (en años) de un niño, su padre y su abuelo verifican las siguientes condiciones: La edad del padre es  $\alpha$  veces la de su hijo. El doble de la edad del abuelo más la edad del niño y más la del padre es de 182 años. El doble de la edad del niño más la del abuelo es 100.

- Establece las edades de los tres suponiendo que  $\alpha = 2$ .
- Para  $\alpha = 3$ , ¿qué ocurre con el problema planteado?
- Siguiendo con  $\alpha = 3$ , ¿qué ocurre si en la segunda condición la suma es 200 en vez de 182?

**Sept 04**

$$\text{Sea el sistema } \begin{cases} 2x + ay + z = 2 \\ x + ay = 1 \\ -y + az = 0 \end{cases}$$

- Estudia su compatibilidad según los valores de  $a$ .
- Resuélvelo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

**Junio 05**

$$\text{Dado el sistema } \begin{cases} x + y = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + (1+a)y + az = a + 1 \end{cases}$$

- Estudia su compatibilidad según los valores de  $a$ .
- Resuélvelo para  $a=2$ .

**Sept 05**

En un cajero automático se introducen billetes de 10, 20 y 50 euros. El número total de billetes es 130 y el total de dinero es 3000€. Se sabe que el número de billetes de 10€ es  $\alpha$  veces los billetes de 50€.

- Calcula el número de billetes de cada tipo suponiendo que  $\alpha = 2$ .
- Para  $\alpha = 3$  ¿qué ocurre con la situación del cajero planteada?
- Siguiendo con  $\alpha = 3$ , si se tuvieran 100 billetes en el cajero ¿cuánto dinero debería haber para que sea posible una composición del cajero?

**Junio 06**

$$\text{Dado el sistema } \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

- Estudia su compatibilidad según los valores de  $a$ .
- Resuélvelo cuando sea posible.

Sept 06

$$\text{Dado el sistema } \begin{cases} (a+2)x + (a-1)y - z = 3 \\ ax - y + z = 3 \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$$

- Estudia su compatibilidad según los valores de  $a$ .
- Resuélvelo para el caso  $a = -1$ .

Junio 07

Cierto país importa 21.000 vehículos de tres marcas A, B y C al precio de 10.000, 15.000 y 20.000 euros respectivamente. El total de la importación asciende a 322 millones de euros. Se ha observado que también hay 21.000 vehículos contando solamente los de la marca B y  $\alpha$  veces los de la A.

- Plantea un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema en función del número de vehículos de cada marca.
- Establece el número de vehículos de cada marca suponiendo  $\alpha = 3$ .
- Estudia si existe algún valor de  $\alpha$  para el cual la situación no pueda darse en el campo de los números reales.

Sept 07

$$\text{Dado el sistema } \begin{cases} 2x + y = a \\ (1-a)x - y = 1 \\ ax + y = a \end{cases}$$

- Estudia su compatibilidad según los valores de  $a$ .
- Resuélvelo cuando sea posible.

Junio 08

Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$ ,  $B = (a, 2, 3)$  y  $C = (4, 0, 2)$ .

- Halle los valores de  $x, y, z$ , para los que  $A$  no tiene inversa.
- Determine los valores de  $a$  para los que el sistema  $B \cdot A = C$  tiene solución.
- Resuelva el sistema anterior cuando sea posible.

Sept 08

$$\text{Dado el número real } a, \text{ se considera el sistema } \left. \begin{array}{l} 2x + ay + 6z = 0 \\ ax + 2y + 4z = 2 \\ ax + 2y + 6z = a - 2 \end{array} \right\}$$

- Discuta el sistema según los valores de  $a$
- Resuelva el sistema para el caso  $a = 1$

Junio 09

$$\text{Dado el número real } a, \text{ se considera el sistema } \left. \begin{array}{l} x - ay + z = a \\ ax - y + z = 1 \\ -ax - y + z = a \end{array} \right\}$$

- Discuta el sistema según los valores de  $a$ .
- Resuelva el sistema para el caso  $a = 2$ .

Sept 09

$$\text{Se considera el sistema } \left. \begin{array}{l} 2y + az = a \\ (a-2)x + y + 3z = 0 \\ (a-1)y = 1 - a \end{array} \right\}$$

- Estudie el sistema, según los valores de  $a \in \mathbb{R}$ .
- Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

**Junio 10**  
**f.general**

Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z &= 2 \\ ax - y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discuta su compatibilidad según los distintos valores de  $a$ .  
c) Resuélvalo, si es posible, cuando  $a = 0$ .

**Junio 10**  
**f.específ**

Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= a \\ x + y + z &= a \\ y + az &= 2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores de  $a$ .  
b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

**Sept 10**  
**f.general**

Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + mz &= 1 \\ 4x + y + m^2z &= m \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores de  $m$ .  
b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

**Sept 10**  
**f.**  
**específ**

Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ 3x + ay + 2z &= 3 \\ x + 2y + az &= 2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores de  $a$ .  
b) Resuélvalo, si es posible, en el caso en que  $a = 0$ .

**Junio 11**  
**f.general**

Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} x + ay - z &= 1 + a \\ x + y - az &= 2 \\ x - y - z &= a \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores de  $a$ .  
b) Resuélvalo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

**Junio 11**  
**f.específ**

Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores de  $a$ .  
b) Resuélvalo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

**Julio 11**  
**f.general** Calcule los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la curva de ecuación  $y = ax^3 + bx^2 + cx + 4$  pase por los puntos  $(1,10)$ ,  $(-1,2)$  y  $(2,26)$ . Demuestre que la curva es única. Escriba dicha curva.

**Julio 11**  
**f.general** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -a \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$

- a) Estudie su rango según los valores del número real  $a$ .
- b) Resuelva el sistema homogéneo cuya matriz es  $A$  en el caso  $a = -1$ .

**Julio 11**  
**f.** Dado el sistema

**f. específico**

$$\left. \begin{array}{l} -ax + y = 1 \\ -x + ay - z = 0 \\ x + y + az = 1 \end{array} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores del número real  $a$ .
- b) Resuélvalo cuando  $a = 0$  si es posible.

**Junio 12**  
**f.general** Dado el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ ay + z = 0 \\ x + (1+a)y + az = a+1 \end{array} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores de  $a$ .
- b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado.

**Junio 12**  
**f.general**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Resuelva la ecuación  $\det(A - x \cdot I_3) = 0$
- b) Discuta el sistema homogéneo de matriz  $A - x \cdot I_3$  según los valores del número real  $x$ .
- c) Resuélvalo en aquellos casos en que el sistema sea compatible determinado.

**Junio 12**  
**f.específ** Dado el sistema

$$\left. \begin{array}{l} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1+a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{array} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores de  $a$ .
- b) Resuélvalo cuando  $a=0$ .

**Julio 12**  
**f.general** Dado el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ ax + y = 1 \\ x + y + 2z = 3 \end{array} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores de  $a$ .
- b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

**Junio 13**  
f.general

Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= 0 \\ x + ay + z &= 0 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores del número real  $a$ .  
b) Resuélvalo cuando  $a$  sea nulo si es posible.

**Junio 13**  
f.específ

Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} ax + 2y + 2z &= a \\ 2x + ay + 2z &= -a \\ 2x + 2y + az &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores del número real  $a$ .  
b) Resuelva el sistema, si es posible, cuando  $a = -4$ .

**Julio 13**  
f.general

Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} -a & 2 & 0 \\ 1 & -1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$

- a) Obtenga los valores de  $a$  para los que  $\det(A) = 0$ .  
b) Discuta el sistema homogéneo de matriz  $A$  según los valores del número real  $a$ .  
c) Resuélvalo, si es posible, en el caso  $a = 1$ .

**Julio 13**  
f.general

En el primer curso de un centro de la Universidad de Oviedo se han matriculado 352 alumnos divididos en tres titulaciones distintas. En la tercera titulación hay la tercera parte de alumnos que en la primera, y la diferencia de alumnos que hay entre la primera titulación y la segunda es inferior en dos alumnos al doble de los alumnos que hay en la tercera.

- a) Establezca un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de alumnos de cada titulación, y obtenga el número de alumnos que hay en cada titulación.  
b) Calcule el determinante de la matriz del sistema.

**Julio 13**  
f.específ

Dado el sistema

$$\left. \begin{aligned} x - y + az &= 1 \\ ax + 3y + z &= 0 \\ 2x + ay + 2az &= 2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores del número real  $a$ .  
b) Resuélvalo, si es posible, cuando  $a = -2$ .

**Julio 13**  
f.específ

Considere la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Escriba factorizado el polinomio  $p(x) = \det(A - xI_3)$  donde  $I_3$  es la matriz identidad de orden 3.  
b) Busque las raíces de  $p(x)$ . (0,5 puntos)  
c) Resuelva el sistema homogéneo con matriz  $A - xI_3$  cuando sea compatible indeterminado.