Soluciones 2ª ev. Matemáticas II

1.- *Sigui* $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. *Trobeu els valors de les variables* x *i* y *perquè es compleixi que* $A^2 = A$.

Busquem el valor de la matriu A^2,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-6 & 3x+3y \\ -2x-2y & -6+y^2 \end{pmatrix} .$$

La igualtat $A^2 = A$ ens porta al sistema d'equacions

$$x^2 - 6 = x \; ; \quad 3x + 3y = 3 \; ; \quad -2x - 2y = -2 \; ; \quad y^2 - 6 = y \; .$$

De fet, la segona i la tercera equacions són la mateixa, $x + y = 1$. De la primera equació,

$$x^2 - 6 = x \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3 \text{ o } x = -2 \; .$$

La quarta equació és similar a la primera amb diferent variable. Les solucions són $y = 3$, $y = -2$. En principi, sembla que hi ha quatre solucions diferents,

$$x = 3 \text{ amb } y = 3; \quad x = 3 \text{ amb } y = -2; \quad x = -2 \text{ amb } y = 3; \quad x = -2 \text{ amb } y = -2.$$

Ara bé, d'aquestes quatre solucions solament dues compleixen l'equació $x + y = 1$:

$$x = 3 \text{ amb } y = -2 \; ; \quad x = -2 \text{ amb } y = 3 \; .$$

2.- Donat el sistema on m és un paràmetre:

$$\begin{cases} \quad y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2-2m)x + (2m-2)z = m-1 \end{cases}$$

a) discutiu el sistema segons els valors de m;
b) resoleu els casos compatibles;

a) **[1,5 punts]** Si el discutim a través del determinant del sistema,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (m-1); ,$$

1) per $m \neq 1$, el sistema és compatible determinat.
2) per $m = 1$, el sistema queda reduït a dues equacions,

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1, \end{cases}$$

el rang de la matriu del sistema és 2 i, per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

També es pot discutir tot observant que restant la segona equació de la primera s'obté $x = 3/2$. Substituint aquest valor a la tercera equació,

$$3(1-m)+2(m-1)z = m-1 \Rightarrow (m-1)z = 2(m-1)$$

Si $m \neq 1$, $z = 2$ i, substituint a la primera equació, $y = 0$. El sistema té, doncs, solució única: compatible determinat. De passada tenim la solució:

$$x = 3/2; \quad y = 0; \quad z = 2.$$

Si $m = 1$, el valor de z queda indeterminat i, de la primera equació, $y = 2 - z$. El sistema té doncs, infinites solucions que depenen del valor de z: sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Tenim també la solució:

$$x = 3/2; \quad y = 2 - z; \quad z = z.$$

Per últim, també es pot discutir per Gauss. Intercanviem l'ordre de les dues primeres equacions,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 & m-1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(tot suposant que } m \neq 1\text{)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-m & m-1 & 2m-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2m-2 & 4m-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O sigui que si $m \neq 1$ el sistema és compatible determinat.
El cas $m = 1$ porta a la matriu reduïda,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{de rang 2.}$$

per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) **[1,5 punts]** El cas $m \neq 1$. La solució és $x = 3/2; \quad y = 0; \quad z = 2.$
El cas $m = 1$. La solució és $x = 3/2; \quad y = 2 - z; \quad z = z.$

3.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) obtener A^{-1} *utilizando la expresión del apartado a)*

c) Calcular A^{100}.

a)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego $A^3 + I = -I + I = O$.

b) $A^3 + I = O \Longrightarrow A \cdot A^2 = -I \Longrightarrow A \cdot (-A^2) = I \Longrightarrow A^{-1} = -A^2$

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Tenemos $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3 = -I$, $A^4 = -A$, $A^5 = -A^2$, $A^6 = I$,... Dividiendo 100 entre 6 el resto es 4 luego $A^{100} = A^4 = -A$.

4.- Determineu per a quin valor del paràmetre λ el sistema següent

$$\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=\lambda \end{cases}$$

és compatible i, en aquest cas, resoleu-lo.

Solució: Pel mètode de Gauss resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & \lambda-10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{array}\right)$$

Per a tot $\lambda \neq 4$ el sistema és incompatible. Per $\boxed{\lambda = 4}$ és compatible. Calculem la solució:

$$z = z$$

$$y = 4z - \frac{3}{2}$$

$$x = 3y - 5z + 2 = 12z - \frac{9}{2} - 5z + 2 = 7z - \frac{5}{2}$$

que correspon a la solució vectorial:

$$\boxed{(x,y,z) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) + z(7,4,1)}$$

5.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$

SOL

a) $\left|\begin{pmatrix}2&4&6\\6&0&3\\\alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}^4\right| = \begin{vmatrix}2&4&6\\6&0&3\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}^4 = 2^4\begin{vmatrix}1&2&3\\6&0&3\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}^4 = 6^4$

b) $\begin{vmatrix}10&20&30\\2&0&1\\3\alpha&3\beta&3\gamma\end{vmatrix} = 3\cdot 10\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\2&0&1\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix}1&2&3\\6&0&3\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix} = 30$

c) $\begin{vmatrix}3\alpha+2&3\beta+4&3\gamma+6\\2\alpha&2\beta&2\gamma\\\alpha+6&\beta&\gamma+3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3\alpha&3\beta&3\gamma\\2\alpha&2\beta&2\gamma\\\alpha+6&\beta&\gamma+3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2&4&6\\2\alpha&2\beta&2\gamma\\\alpha+6&\beta&\gamma+3\end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix}2&4&6\\2\alpha&2\beta&2\gamma\\\alpha+6&\beta&\gamma+3\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}1&2&3\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha+6&\beta&\gamma+3\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}1&2&3\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix} +$

$4\begin{vmatrix}1&2&3\\\alpha&\beta&\gamma\\6&0&3\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}1&2&3\\6&0&3\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix} = -12$

6.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix}1&x&x\\y&0&y\\z&y&z\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3&2&m\end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}$

a) Determinar para que valores de **x**, **y** , **z** la matriz **A** no tiene inversa
b) Determina para que valores del parámetro **m** el sistema dado por **B.A = C** tiene solución
c) Resuelve el sistema anterior para **m = 1**

---

a)

$$|A| = \begin{vmatrix}1&x&x\\y&0&y\\z&y&z\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xyz + xy^2 - y^2 - xyz = 0 \Rightarrow xy^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x-1)y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases}\begin{cases}x-1 \Rightarrow x=1\\ z=\lambda\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\ z=\lambda\end{cases}\end{cases} ,\lambda\in\Re$$

b)

$$\begin{pmatrix}3&2&m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&x&x\\y&0&y\\z&y&z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3+2y+mz & 3x+my & 3x+2y+mz\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}3+2y+mz=2\\3x+my=0\\3x+2y+mz=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2y+mz=-1\\3x+my=0\\3x+2y+mz=1\end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix}0&2&m\\3&m&0\\3&2&m\end{vmatrix} = 6m-3m^2-6m = -3m^2 \Rightarrow$$

$Si\ |A| = 0 \Rightarrow m = 0$

$(Para\ todo)\forall m\in\Re-\{0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist.Comp.Determinado$

c)

$$\begin{cases}2y+z=-1\\3x+y=0\\3x+2y+z=1\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}0&2&1&-1\\3&1&0&0\\3&2&1&1\end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c}0&2&1&-1\\3&1&0&0\\0&1&1&1\end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&-1&-3\\3&1&0&0\\0&1&1&1\end{array}\right) \Rightarrow -z=-3 \Rightarrow z=3 \Rightarrow y+3=1 \Rightarrow$$

$$y=-2 \Rightarrow 3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \Rightarrow Solución \Rightarrow \begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-2&3\end{pmatrix}$$