SOLUCIONES MODELO EXAMEN 5ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II

1ª) De todas las primitivas de la función $f(x)=2\,tag\ x\cdot\sec^2 x$, hallar la que pasa por el punto $P(\frac{\pi}{4},\ 1)$.

$$F(x)=\int 2\,tag\ x\cdot\sec^2 x\cdot dx=2\int\frac{sen\ x}{\cos^3 x}\cdot dx\ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix}\cos x=t\\ -sen\ x\cdot dx=dt\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ F(t)=-2\int\frac{dt}{t^3}=-2\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=\frac{1}{t^2}+C=F(t)\ \Rightarrow\ \underline{F(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+C}$$

Como F(x) tiene que pasar por el punto $P(\frac{\pi}{4},\ 1)$ tiene que ser $F(\frac{\pi}{4})=1$:

$$F(\tfrac{\pi}{4})=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}+C=\frac{1}{\cos^2 45^{o}}+C=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+C=2+C=1\ \Rightarrow\ \underline{C=-1}$$

La función pedida es:

$$\underline{F(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=tag^2\ x}$$

****

2º) Dos hermanos heredan una parcela que ha de repartirse. La parcela es la región limitada por la curva $y=\sqrt{x-1}$ y la recta $y=\frac{1}{2}(x-1)$.

a) Calcular el área de la parcela.

b) Deciden dividir la parcela en partes iguales, mediante una recta de la forma y = α. Hallar el valor de α > 0.

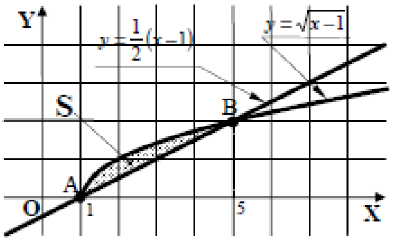
----

a)

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que aparece en la primera figura.

Los puntos de corte de la curva y la recta son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{x-1} \\ y=\frac{1}{2}(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x-1}=\frac{1}{2}(x-1) ;;$$



$$2\sqrt{x-1}=x-1 ;;\ 4(x-1)=(x-1)^2 ;;$$

$$(x-1)^2-4(x-1)=0 ;;\ (x-1)[(x-1)-4]=0 ;;$$

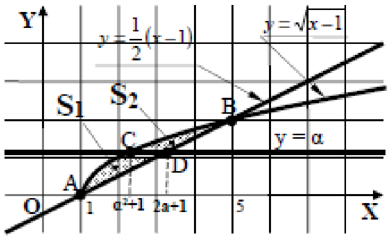
$$(x-1)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=1} \rightarrow y_1=0 \Rightarrow \underline{A(1,\ 0)} \\ \underline{x_2=5} \rightarrow y_2=2 \Rightarrow \underline{B(5,\ 2)} \end{cases}.$$

De la observación de la figura se deduce el área pedida, que es la siguiente:

$$S=\int_1^5\left[\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}(x-1)\right]\cdot dx=\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^5=\left[\frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(x-1)^2}{4}\right]_1^5=$$

$$=\left[\frac{2(5-1)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(5-1)^2}{4}\right]-0=\frac{2\sqrt{4^3}}{3}-4=\frac{2\cdot 8}{3}-4=\frac{16}{3}-4=\frac{16-12}{3}=\underline{\frac{4}{3}u^2=S}.$$

b)



Los puntos C y D son las intersecciones de la recta y = α con la curva y la recta, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{x-1} \\ y=a \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x-1}=a ;;\ x-1=a^2 ;;$$

$x=a^2+1 \Rightarrow \underline{C(a^2+1,\ a)}$.

$$\left.\begin{array}{l} y=a \\ y=\frac{1}{2}(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{1}{2}(x-1) \;;\; 2a=x-1 \;;\; x=2a+1 \Rightarrow \underline{D(2a+1,\ a)}.$$

Como las superficies S_1 y S_2 tienen que ser iguales, ha de ser:

$$S_1=\int_1^{a^2+1}\left[\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}(x-1)\right]\cdot dx+\int_{a^2+1}^{2a+1}\left[a-\frac{1}{2}(x-1)\right]\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^{a^2+1}+\left[ax-\frac{(x-1)^2}{4}\right]_{a^2+1}^{2a+1}=$$

$$=\left[\frac{2(a^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(a^2)^2}{4}\right]-0+\left[a(2a+1)-\frac{(2a)^2}{4}\right]-\left[a(a^2+1)-\frac{(a^2)^2}{4}\right]=$$

$$=\frac{2a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+2a^2+a-a^2-a^3-a+\frac{a^4}{4}=\frac{2a^3}{3}+a^2-a^3=-\frac{a^3}{3}+a^2=\underline{\frac{3a^2-a^3}{3}}=S_1.$$

$$S_2=\int_{a^2+1}^{2a+1}\left[\sqrt{x-1}-a\right]\cdot dx+\int_{2a+1}^{5}\left[\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}(x-1)\right]\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-ax\right]_{a^2+1}^{2a+1}+\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x-1)^2}{4}\right]_{2a+1}^{5}=$$

$$=\left[\frac{2(2a)^{\frac{3}{2}}}{3}-a(2a+1)\right]-\left[\frac{2(a^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-a(a^2+1)\right]+\left[\frac{2(4)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{4^2}{4}\right]-\left[\frac{2(2a)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(2a)^2}{4}\right]=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{(2a)^3}}{3}-2a^2-a-\frac{2a^3}{3}+a^3+a+\frac{16}{3}-4-\frac{2\cdot\sqrt{(2a)^3}}{3}+a^2=-a^2-\frac{2a^3}{3}+a^3+\frac{16}{3}-4=$$

$$=-a^2+\frac{a^3}{3}+\frac{4}{3}=\underline{\frac{a^3-3a^2+4}{3}}=S_2.$$

$$S_1=S_2 \Rightarrow \frac{3a^2-a^3}{3}=\frac{a^3-3a^2+4}{3} \;;\; 3a^2-a^3=a^3-3a^2+4 \;;\; 2a^3-6a^2+4=0 \;;$$

$\underline{a^3-3a^2+2=0}$. Resolviendo por Ruffini:

	1	-3	0	2
1		1	-2	-2
	1	-2	-2	$\boxed{0}$

$a^2-2a-2=0 \;;\; a=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$.

Las soluciones son $\underline{a_1=1}$, $\underline{a_2=1+\sqrt{3}}$, $\underline{a_3=1-\sqrt{3}}$.

La única solución valida es para α = 1 ya que las otras dos soluciones están fuera del intervalo (0, 2), que es el recorrido de la curva en el dominio de la parcela.

<u>Deben dividir la parcela mediante la recta y = 1.</u>

****

3ª) Dada la función $f(x)=\dfrac{sen\ x+sen(x+1)}{\cos\ x-\cos(x+1)}$ en el intervalo $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, demostrar, calculando su derivada, que f(x) es constante.

$$f'(x)=\frac{[\cos x+\cos(x+1)]\cdot[\cos x-\cos(x+1)]-[sen\ x+sen(x+1)]\cdot[-sen\ x+sen(x+1)]}{[\cos x-\cos(x+1)]^2}=$$

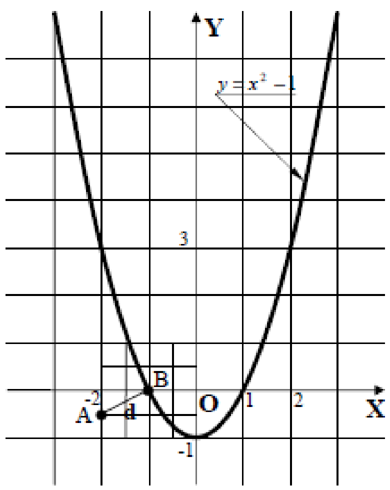
$$=\frac{[\cos^2 x-\cos^2(x+1)]-[sen^2(x+1)-sen^2 x]}{[\cos x-\cos(x+1)]^2}=\frac{\cos^2 x-\cos^2(x+1)-sen^2(x+1)+sen^2 x}{[\cos x-\cos(x+1)]^2}=$$

$$=\frac{(\cos^2 x+sen^2 x)-[\cos^2(x+1)+sen^2(x+1)]}{[\cos x-\cos(x+1)]^2}=\frac{1-1}{[\cos x-\cos(x+1)]^2}=$$

$$=\frac{0}{[\cos x-\cos(x+1)]^2}=\underline{\underline{0=f'(x)}}$$

****

4) Hallar, de entre los puntos de la parábola de ecuación $y=x^2-1$, los que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right)$.



Sea B un punto de la parábola que cumple la condición de estar lo más próximo posible al punto dado A.

El punto B por pertenecer a la curva $y=x^2-1$ es de la forma $B(x,\ x^2-1)$.

La distancia entre los puntos A y B tiene que ser mínima, por lo tanto, su derivada tiene que ser nula.

$$d=\overline{AB}=\sqrt{[x-(-2)]^2+\left[x^2-1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2}=$$

$$=\sqrt{(x+2)^2+\left(x^2-1+\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(x+2)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2+4x+4+x^4-x^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{4x+4+x^4+\frac{1}{4}}=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{4x^4+16x+17}=d}$$

$$d'=\frac{1}{2}\cdot\frac{16x^3+16}{2\sqrt{4x^4+16x+17}}=\frac{4x^3+4}{\sqrt{4x^4+16x+17}}=0\ \Rightarrow\ 4x^3+4=0\ ;;\ x^3+1=0\ ;;\ \underline{x=-1}$$

Solamente un punto cumple la condición.

$\underline{El\ \ punto\ \ pedido\ \ es\ \ B(-1,\ 0)}$

****

5- ***Siguin*** π_1 ***el pla*** $2x+3y-z=4$ ***i*** π_2 ***el pla*** $x-2y-4z=10$ **.**

(a) ***Comproveu que els plans*** π_1 ***i*** π_2 ***són perpendiculars.***

(b) ***Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans*** π_1 ***i*** π_2 ***i que passa pel punt*** $P=(-1,3,2)$**.**

(a) Un vector característic de cada un dels plans és $v_1=(2,3,-1)$ i $v_2=(1,-2,-4)$, respectivament. Els plans són perpendiculars si els seus vectors característics també ho són, és a dir, si el producte escalar dels vectors característics dóna zero.

$$v_1 \cdot v_2 = 2\cdot 1 + 3(-2) + (-1)(-4) = 2-6+4 = 0\,.$$

(b) Si la recta r és paral·lela als dos plans, el seu vector director v_r és perpendicular als vectors característics del dos plans. Per tant, podem agafar

$$v_r = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -14i+7j-7k = (-14,7,-7)\,,$$

o qualsevol proporcional a ell com, per exemple, $(2,-1,1)$. L'equació buscada és

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{1}\,.$$

6.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda\,, \\ y=3+\lambda\,, \\ z=1-\lambda\,, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x-y=2\,, \\ y+z=1\,, \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s.
b) (1 punto) Obtener un plano que contenga a las dos rectas.

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta s son $\begin{cases} x=2+\mu\,, \\ y=\mu\,, \\ z=1-\mu\,, \end{cases}$ lo que prueba que $\vec{v}=(1,1,-1)$ es vector director de ambas rectas. Además, el punto $P(2,3,1)$ está en r, pero no en s. Por lo tanto las rectas son $\boxed{\text{paralelas}}$.

b) El plano π que contiene a ambas rectas está determinado por el punto P, el vector $\vec{v}=(1,1,-1)$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$, con $Q(2,0,1)$. Por tanto $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x+z=3}$.

.