Soluciones 3ª ev. Matemáticas II - MODELO EXAMEN

1.- Solució

Calculem el valor de la matriu A^2,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a-b & b^2 \end{pmatrix}.$$

Quan igualem aquest resultat a la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ens queden les equacions $a^2 = 1$, $a - b = -2$ i $b^2 = 1$. La segona equació permet assegurar que $a = b - 2$. Llavors, la primera equació és $(b-2)^2 = 1$ que té per solucions $b = 3$ i $b = 1$; la tercera equació té per solucions $b = 1$ i $b = -1$. El valor que les compleix simultàniament és $b = 1$; d'aquí, $a = 1 - 2 = -1$.

També es pot treballar de la forma explicitada a continuació.

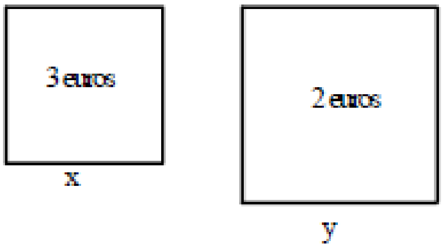
De la primera equació, resulta $a = \pm 1$; igualment, de la tercera en deduïm que $b = \pm 1$. Ara cal comprovar aquests valors en la segona equació.

- Quan $a = 1$ i $b = 1$, tenim que $a - b = 0$.
- Per $a = 1$ i $b = -1$, surt que $a - b = 2$.
- Si $a = -1$ i $b = 1$, ens queda que $a - b = -2$.
- Finalment, quan $a = -1$ i $b = -1$, tenim que $a - b = 0$.

Així l'única solució és $a = -1$ i $b = 1$.

2.

SOLUCIÓN.



La función coste es: $C = 3x^2 + 2y^2$

Además: $4x + 4y = 100 \Rightarrow x + y = 25 \Rightarrow y = 25 - x$ por lo que la función "coste" es:

$$C(x) = 3x^2 + 2(25-x)^2 = 3x^2 + 1250 - 100x + 2x^2 = 5x^2 - 100x + 1250$$

Veamos dónde alcanza esta función su valor mínimo:

$C'(x) = 10x - 100 = 0 \Rightarrow x = 10$ (valor crítico).
$C''(x) = 10 > 0 \Rightarrow$ Para x = 10, el coste es mínimo.

Por tanto, $\boxed{\text{el lado de la chapa de 3 € debe ser de 10 cm y el de la chapa de 2 € debe medir 15 cm.}}$

3.

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \operatorname{tag} x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$

$f''(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 2e^x \cos x \Rightarrow f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{3\pi}{4}} \cos\dfrac{3\pi}{4} < 0 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ es un máximo relativo.

Como $f(0) = f(\pi) = 0$ y la función es continua, alcanza su máximo en $\dfrac{3\pi}{4}$ dentro del intervalo $(0, \pi)$

b) Tangente en x = 0: pasa por el punto $(0, 0)$ y su pendiente es $f'(0) = 1$, por lo que su ecuación es $y = x$.

Tangente en $x = \pi$: pasa por el punto $(\pi, 0)$ y su pendiente es $f'(\pi) = -e^{\pi}$ luego su ecuación es: $\boxed{y = -e^{\pi}(x - \pi)}$

4)

$$e^x = t \;\Rightarrow\; e^x\,dx = dt \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

Se tiene: $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \int \frac{t^3}{t^2+3t+2}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^3}{t^3+3t^2+2t}\,dt =$

$$\begin{array}{l|l} t^3 & t^3+3t^2+2t \\ \cline{2-2} \underline{-t^3-3t^2-2t} & 1 \\ \quad -3t^2-2t & \end{array}$$

$$= \int \left(1 - \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t}\right) dt = t - \int \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t}\,dt = (1)$$

Resolvamos la última integral:

$$t^3+3t^2+2t = t\left(t^2+3t+2\right) = t(t+1)(t+2) \quad / \quad t^2+3t+2=0 \;\Rightarrow\; t=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}= \begin{cases} t=-1 \\ t=-2 \end{cases}$$

$$\frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t+2} = \frac{A(t+1)(t+2)+Bt(t+2)+Ct(t+1)}{t(t+1)(t+2)} = \frac{At^2+2At+At+2A+Bt^2+2Bt+Ct^2+Ct}{t^3+3t^2+2t} =$$

$$= \frac{(A+B+C)t^2+(3A+2B+C)t+2A}{t^3+3t^2+2t} \Rightarrow \begin{array}{c} A+B+C=3 \\ 3A+2B+C=2 \\ 2A=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=0 \\ -B-C=-3 \\ 2B+C=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=0 \\ B=-1 \\ C=4 \end{array} \Rightarrow \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t} = \frac{-1}{t+1}+\frac{4}{t+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{3t^2+2t}{t^3+3t^2+2t}\,dt = -\int \frac{dt}{t+1} + 4\int \frac{dt}{t+2} = -\ln|t+1| + 4\ln|t+2| = \ln\left|\frac{(t+2)^4}{t+1}\right|$$

Por tanto: $\displaystyle (1) = t - \ln\left|\frac{(t+2)^4}{t+1}\right| = \boxed{e^x - \ln\left(\frac{(e^x+2)^4}{e^x+1}\right) + C}$

5)

$$f''(x)=4 \;\Rightarrow\; f'(x)=\int 4\,dx = 4x+C \;\Rightarrow\; f(x)=\int (4x+C)\,dx = 2x^2+Cx+D$$

La pendiente de la tangente $m=9$ es igual a $f'(3)$: $\quad 12+C=9 \;\Rightarrow\; C=-3 \;\Rightarrow\; f(x)=2x^2-3x+D$

El punto de tangencia es común a la curva y a la tangente:

$$x=3\ ,\ y=27-13=14 \;\Rightarrow\; (3,14)\in f(x) \;\Rightarrow\; f(3)=18-9+D=14 \;\Rightarrow\; D=5$$

La ecuación de la curva es entonces: $\boxed{f(x)=2x^2-3x+5}$

6.

$$\int e^{-x}\cdot sen(2x)dx =$$

$$u=e^{-x} \rightarrow du=-e^{-x}dx$$

$$dv=sen(2x) \rightarrow v=-\frac{\cos(2x)}{2}$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)e^{-x}dx =$$

$$u=e^{-x} \rightarrow du=-e^{-x}dx$$

$$dv=\cos(2x) \rightarrow v=\frac{sen(2x)}{2}$$

$$=-\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\left(\frac{sen(2x)e^{-x}}{2} + \int \frac{1}{2}e^{-x}sen(2x)\right)=$$

$$=-\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{sen(2x)e^{-x}}{4} - \frac{1}{4}\underbrace{\int e^{-x}sen(2x)}_{I}$$

$$I=-\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{sen(2x)e^{-x}}{4} - \frac{1}{4}I \rightarrow \frac{5}{4}I = -\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{sen(2x)e^{-x}}{4} \rightarrow$$

$$I=\int e^{-x}\cdot sen(2x)dx = \frac{4}{5}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{sen(2x)e^{-x}}{4}\right) = \boxed{-e^{-x}\left(\frac{2\cos(2x)}{5} + \frac{sen(2x)}{5}\right) + C}$$