Soluciones 3ª ev. Matemáticas II - MODELO EXAMEN 2-BIS

1) Solució:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{-I_3}$

b) A la vista del resultat anterior, podem assegurar que $A^6 = I_3$. Llavors,

$$A^{60124} = A^{1020\cdot 6+4} = (A^6)^{1020} \cdot A^4 = I_3 \cdot A^4 = A \cdot A^3 = -A$$

$$\boxed{A^{60124} = -A}$$

2.- 1)

$h'(x) = 2\cdot g(x)\cdot g'(x) = 2\cdot g(x)\cdot \cos\left(x^2\right) \Rightarrow h'(0) = 2\cdot g(0)\cdot \cos\left(0^2\right) = 2\cdot 1\cdot \cos(0) = 2\cdot 1\cdot 1 = \boxed{2}$

2)

$g(x) = \int x\cos\left(x^2\right)dx = \int \cos\left(x^2\right)x\,dx = \int \cos t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos t\;\;dt = \frac{1}{2}sen\;t = \boxed{\frac{sen\left(x^2\right)}{2} + K}$

$x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$

3.- a)

Continuidad

Cont. si:

$$\begin{cases} f(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\pi\cdot sen\ \pi=\pi\cdot 0=0 \\ \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=a\cdot\cos\pi+b=a\cdot(-1)+b=-a+b \end{cases} \Rightarrow f(\pi)=\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^+} f(x)\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow \boxed{a=b}$$

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases} sen\ x+x\cos x & si\quad x<\pi \\ -a\ sen\ x & si\quad x>\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\pi^-} f'(x)=sen\ \pi+\pi\cdot\cos\pi=0+\pi\cdot(-1)=-\pi \\ \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=-a\cdot sen\ \pi=-a\cdot 0=0 \end{cases} \Rightarrow -\pi\neq 0$$

No Deriv sea cual sean los valores de a y b.

Si a = b la función es continua, no siendo derivable en ningún caso

b)

$$\int x\ sen\ x\ dx=x\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\int\cos x\ dx=-x\cos x+sen\ x+K$$

$$\begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ sen\ x\ dx=dv\Rightarrow v=\int sen\ x\ dx=-\cos x \end{cases}$$

$$A=\int_0^\pi x\ sen\ x\ dx=[-x\cos x+sen\ x]_0^\pi=(-\pi\cos\pi+sen\ \pi)-(-0\cdot\cos 0+sen\ 0)=-\pi\cdot(-1)+0-0$$

$$\boxed{A=\pi\ u^2}$$

4. a) Les primitives de $2x-2$ són de la forma $g(x)=x^2-2x+k$, on k és una constant. Si la gràfica ha de passar per $(1,-4)$ és que $g(1)=-4$ i, per tant, $k=-3$. D'aquí que resulti $\boxed{f(x)=x^2-2x-3.}$

b) Els punts de tall de la gràfica de $f(x)$ amb l'eix d'abscisses corresponen a $x=-1$ i $x=3$. L'àrea que es demana serà

$$-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\,dx=\boxed{\frac{32}{3}}$$

5)

Solució

a) No són del domini solament els valors de la variable x que anul·len en denominador. Per tant, $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

b) *Asímptotes verticals.* Com que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty,$$

podem assegurar que la recta $x = -1$ és una asímptota vertical. Paral·lelament, es comprova que $x = 1$ també és una asímptota vertical.

Asímptota horitzontal. El fet de què $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (ja que el grau del numerador és major que el grau del denominador), ens assegura que no hi ha asímptota horitzontal.

Asímptota obliqua. És de la forma $y = mx + b$ amb $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$. En el nostre cas,

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = 2; \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 1} - 2x \right) = 0.$$

Així, tenim asímptota obliqua, d'equació $y = 2x$.

c) La derivada de la funció és $f'(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^2}{(x^2 - 1)^2}$, que val zero quan $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ o $x = \sqrt{3}$. Marquem, a la recta real, els punts que anul·len la primera derivada i els que no són del domini,

$-\sqrt{3}$ $\quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad$ $\sqrt{3}$

Així, la recta real queda dividida en sis intervals: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$. Busquem el signe de la primera derivada en un punt de cada un d'aquests intervals,

$$f'(-2) > 0; \; f'(-1,5) < 0; \; f'(-0,5) < 0; \; f'(0,5) < 0; \; f'(1,5) < 0; \; f'(2) > 0.$$

L'esquema de signes per la primera derivada és

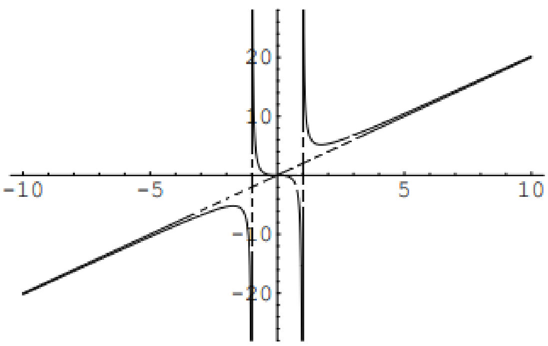
$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad +$

$-\sqrt{3}$ $\quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad$ $\sqrt{3}$

Per tant, la funció $f(x)$

- és creixent a $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$;
- és decreixent a $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$;
- té un màxim quan $x = -\sqrt{3}$;
- té un mínim quan $x = \sqrt{3}$.

Encara que en el problema no es demana, la gràfica d'aquesta funció (amb indicació de les asímptotes) és, aproximadament,



6.- *Ecuación recta tangente en $x = e$*

$$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow\begin{cases} f(e)=\ln e=1 \\ f'(e)=\frac{1}{e}\end{cases}\Rightarrow y-1=\frac{1}{e}\cdot(x-e)\Rightarrow y=\frac{1}{e}\cdot(x-e)+1\Rightarrow y=\frac{x-e+e}{e}\Rightarrow y=\frac{x}{e}$$

$$\text{Puntos de corte de las funciones con } OX \Rightarrow y=0\Rightarrow\begin{cases}\ln x=0\Rightarrow x=e^0=1\\ 0=\frac{x}{e}\Rightarrow x=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$A=\int_0^e \frac{x}{e}\,dx-\int_1^e \ln x\,dx=\frac{1}{e}\cdot\int_0^e x\,dx-\left\{\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e x\,\frac{dx}{x}\right\}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^e-(e\ln e-1\ln 1)+\int_1^e dx$$

$$\text{Por partes}\begin{cases} u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}\\ dx=dv\Rightarrow v=\int dx=x\end{cases}$$

$$A=\frac{1}{2e}\cdot\left(e^2-0^2\right)-(e\cdot 1-1\cdot 0)+\left[x\right]_1^e=\frac{e}{2}-e+(e-1)=\frac{e}{2}-e+e-1=\boxed{\left(\frac{e}{2}-1\right)u^2}$$